# نظریه مجموعه‌ها و مقدمات برای دفع اشکال داریوس

مطلبی که می‌خواستم راجع به استدلال عرض کنم، مقدماتش در جلسات گذشته مطرح شد؛ راجع به استدلال هم بحث‌های خوبی پیش آمد، ولی آن هم ماند. می‌خواستم سه-چهار جلسه قبل عرض کنم. اشکال آن آقا [داریوس] بود که هم معرفت‌شناختی بود و هم هستی‌شناختی. گفت این اشتباه است که می‌گویند معرفت ما اتمیک و به شکل گزاره‌ها است. بلکه اساساً ذهن انسان و ادراکات او در یک زمینه شکل می‌گیرد؛ در یک ضمیر ناخودآگاه شکل می‌گیرد که آن ضمیر ناخودآگاه اصل است، نه آن چیزهای اتمیک که آن‌ها را به‌صورت گزاره درک کنیم. دومین اشکالش هم هستی‌شناختی بود که گفت اصلاً عالم هستی به‌صورت قضایای اتمیک نیست و واقعیت هستی آن به این صورت نیست. نه معرفت ما معرفتی منعزل و نمادین است، و نه هستی به این صورت است که حقائق اتمیک باشد. لذا این اشکالات را حتی به اصل هوش ضعیف داشت.

من عرض کردم این‌طور نیست؛ ما قدرت نمادها را دست کم گرفته‌ایم. چیزی که در ذهن طلبگی من است، این است که باید این معنا را درک کنیم؛ نمادگذاری چه قدرتی دارد! گاهی این قدرت دست کم گرفته می‌شود. واقعاً شعبی هم دارد؛ خداوند متعال برای انسان می‌فرماید: «عَلَّمَهُ الْبَیَانَ»[1]؛ این بیان با زبان و صرف و نحو متفاوت می‌شود. این قدرت، خیلی قدرت عظیمی است و نباید ما این را دست کم بگیریم.

در پایه‌ای که بخشی از حقائق -حقائق یمکن أن یظهر- ظهور می‌کند، اگر فرض بگیریم -ولو استحاله آن را که برخی از علماء فرموده‌اند، بپذیریم، ولی فرض محال، محال نیست- یک سلسله‌ای داشته باشیم که از حیث کوچکی بینهایت کوچک و از حیث بزرگ شدن، بینهایت بزرگ - آن هم به انواع بینهایت کوچک و بزرگ، با هندسه‌های مختلف - اگر فرض بگیریم داشته باشیم، خب اینجا بینهایت اموری نفس الامری در این بستر دارد ظهور می‌کند. این بینهایتی که ظهور می‌کند، آیا شما می‌توانید این‌ها را نمادگذاری کنید یا نه؟ عرض کردم نماد، این قدرت را دارد و نباید نماد را دست کم بگیریم. در این جلسه می‌خواهم قدرت بسیار بالایی را اشاره کنم که بخشی از آن را سال گذشته عرض کردم به این‌که همان صفر و یکی که در سخت‌افزار داشتیم، که این صفر و یک به‌عنوان حامل عدد، به‌عنوان حامل معنای صدق و کذب، تفاوت داشت. جبری که جبر دوارزشی صدق و کذب بود، اگر نبود، هرگز علوم کامپیوتری امروز هم نبود؛ مطلب بسیار مهمی است. الآن هم هر کجا در ظهور معانی دیدی که دارند منطقشه می‌کنند، یادتان باشد که عرض کردم که تا شما پایه کردن جبر بولی را در ماشین و کامپیوتر پیش نکشید، نمی‌توانید جوابشان را بدهید؛ یعنی آن‌ها راست می‌گویند، اما وقتی از فضای صفر و یک ریاضی آمدی و گفتی ۰ یعنی دروغ و ۱ یعنی راست، دیگر صفر و یک نیست، بلکه راست و دروغ است. اگر به این فضا آمدی، اولین قدم برداشته شده تا بتوانید معانی پایه‌محور و معنادار بودن را توضیح بدهید. اگر این را نیاوردی، اصلاً اصل حرف من پوچ است و سر نمی‌رسد. این‌ها را پارسال عرض کردیم و الآن هم می‌خواهم تکمیلش کنم.

ام باید بین نمادهای معنانگار با نمادهای لفظنگار و امثال اینها فرق بگذاریم. ان شاء الله یک مقدمه می‌گویم تا ببینیم درست هست یا نه؛ به عبارت دیگر، توزیع و قدرت نمادهای معنانگار. در همین بهشتی که گفتیم، از عجائبی که عرض کردم این بود: برهانی که اشان آورد، خیلی مهم بود در اینکه بی‌نهایتها را بتوانیم بشماریم. بی‌نهایتِ صفر، بی‌نهایتِ یکی و دو و همینطور جلو برو. شمردن این بی‌نهایتها، اعدادِ بی‌نهایتها است، نه عدد طبیعی شمردن، بلکه قوت و توان بی‌نهایت را می‌شمرد.

شاگرد۱: منظورتان بی‌نهایت عدد بین صفر و یک است؟

استاد: او مجموعه‌های بی‌نهایت را دسته‌بندی کرد. بعد با براهینی که خودش داشت، ثابت کرد که بی‌نهایتهایی که زیاد هستند، توان بی‌نهایتیِ آنها یک جور نیست و بعضی از بی‌نهایتها توان بیشتری دارند. لذا گفت بی‌نهایتهای صفر، یعنی کوچکترین و پایین‌ترین رتبه بی‌نهایت؛ کوچکترینش اعداد طبیعی هستند.

شاگرد۱: آن ریاضیدان این را گفت؟

استاد: بله. مجموعه اعداد طبیعی از یک شروع می‌شود یا از صفر؛ اعداد طبیعی که از یک است - ولی خب عده‌ای هم از صفر شروع می‌کنند، اینکه کدامش بهتر است جای خودش باشد. از صفر شروع می‌کند و تا بی‌نهایت می‌رود - می‌گوییم اعدادی هستند که قدرت شمردن به ما می‌دهند؛ اعداد طبیعی به ما قدرت شمردن می‌دهد.

مهم، مطلبی بود که جلسه قبل عرض کردم که ما یک مجموعه اعداد گویا داریم که همه آشنا هستیم - یک دوم، یک سوم، یک هزارم، یک میلیونیوم، و ... - توصیف مهم این اعداد این بود که مجموعه اعداد گویا که بی‌نهایت است، فشرده است. به‌آوار است! یعنی این بی‌نهایتی که هست، هیچ دو عددی از مجموعه اعداد روی محور نیست، مگر اینکه دوباره بین آن دو عدد، بی‌نهایت عدد است. این حرف ساده‌ای نیست! فشرده، این است. حالا وقتی شما مجموعه اعداد گویا و اعداد کسری را در ذهن بیاوری و بعد بگویی مجموعه فشرده است؛ یعنی هیچ دو عددی از اینها نیست مگر اینکه بین آنها بی‌نهایت عدد است. در همین بی‌نهایتها، هیچ دو عددی نیست مگر اینکه بینش بی‌نهایت عدد هست؛ خیلی عجیب است. این دیگر با اعداد طبیعی فرق می‌کند؛ در اعداد طبیعی، دیگر بین 1 و 2 چیزی نبود و باید تا آخر بروی؛ تا بی‌نهایت بروی. اما اینجا نه فقط اینکه از یک شروع می‌کنی و تا بی‌نهایت می‌روی، بلکه هیچ دو عددی نیست مگر اینکه بین آنها باز بی‌نهایت عدد هست. بین 0 و 1 که بی‌نهایت است؛ بین هر دو کسر بسیار ریز بین صفر و یک، باز بی‌نهایت عدد هست. این مجموعه، فشرده می‌شود.

خب کار عظیمی که او کرد و به‌آوار بود و از شاه‌کارهای قرن بیستم بود، این بود که اشان گفت زور بی‌نهایتی اعداد گویا که فشرده است، برابر با اعداد طبیعی است.

شاگرد۱: بیشتر است یا برابر است؟

استاد: برابر است. این خیلی مهم بود. یعنی شما می‌توانی با مجموعه اعداد طبیعی و اینها تناظر یک به یک برقرار کنی. لذا می‌گویند مجموعه اعداد گویا، شمارا است. یعنی می‌توانی آنها را با مجموعه اعداد طبیعی بشماری. خب این همه بی‌نهایت که دوباره بین هر دو عدد آنها بی‌نهایت عدد هست، ما اینها را بشماریم؟! وقتی کمی جلو می‌روی، گاهی می‌گویی او [ویتگنشتاین] بیخود نگفت که اینها جوک است! خب این همه بی‌نهایت را می‌توانیم بشماریم؟! برهان قطری معروف را آورد و نشان داد؛ گفت من تناظر یک به یک درست می‌کنم. در برهان قطری، تناظر یک به یک را زیر اعداد کسری شروع کرد؛ هر کسی نگاه می‌کند می‌گوید بله، همینطور است؛ یعنی مجموعه اعداد طبیعی در بی‌نهایت چیزی از مجموعه اعداد گویایی که فشرده هست، کم ندارد. این خیلی جالب

و عظیم است.

شاگرد۲: کم ندارد یعنی می‌توانیم یک و دو و سه بشماریم؟

استاد: بله، در آن کاردینال و عدد اصلی اعداد گوید، یک عضوی نداریم که به ازائش در اعداد طبیعی نداشته باشیم. به این، شمارا بودن می‌گویند. اینها خیلی مهم است و از نظر فکری جذاب است.

خب این چیزی که می‌خواهم بگویم، این است: ایشان شماره گذاشت و گفت بنابراین اعداد طبیعی، الف-صفر است - الف را برای اعداد بینهایت گذاشت - و اعداد گویا هم الف-صفر است، یعنی تناظر یک به یک بین اینها [اعداد گویا و اعداد طبیعی] برقرار می‌شود؛ یعنی کوچکترین درجه بینهایت را دارا است.

شاگرد۳: امکانش هست، اما بالفعل که نمی‌توانیم این کار را بکنیم. امکانش هست که می‌توانیم تناظر یک به یک برقرار کنیم.

استاد: برقرار هست؛ وقتی برهان می‌آورد، می‌بینید فی علم الله می‌تواند شمرد و شمارا است، ولو ما عاجز باشیم، ولی راهش را نشان داد. مثال‌هایش را عرض کردم. یک جدول ضرب ده در ده دارید که همه بچه‌ها هم می‌دانند. این جدول را می‌توانیم بیست در بیست کنیم یا نه؟ می‌شود. تا کجا توقف می‌کنیم؟ جایی توقف نمی‌کند. حالا ما قدرت داریم ادامه‌اش بدهیم؟ نه، قدرت نداریم. ولی خود جدول ضرب، تا بینهایت هست و ثبوت ریاضی دارد و هر چه هم شما جلو بروید، آن را به ظهور ریاضی می‌آورید. برهان ایشان هم همین است. می‌گوید که این شمارا است.

حالا مهم، قدم بعدی است؛ از او سؤال می‌کنیم که آیا یک مجموعه عدد بینهایتی داریم که زورش بیشتر از اعداد گویا باشد؟ یعنی یک عضوی در آن باشد که به هیچ وجه ما به ازاء عدد طبیعی - به‌عنوان شمردن - نتوانیم برایش بیاوریم. این را هم ثابت کرد که هست. همه هم این را شنیده‌اید: مجموعه اعداد طبیعی، مجموعه اعداد گویا، مجموعه اعداد حقیقی. یعنی یک محور اعداد، به‌صورت پیوسته، نقاطی دارد. نقاطی از اعداد، روی محور اعداد هست که کل نقاط روی محور را با مجموعه اعداد طبیعی به‌صورت تناظر یک به یک نمی‌توانید بشمارید.

شاگرد۴: چه عددی هست که قابل شمارش نیست؟

استاد: اعداد گنگ. مثلاً رادیکال دو. اگر شما بخواهید جذر دو را بگیرید...؛ تاریخش هم معروف است، در زمان فیثاغورس معلوم شد؛ من باراه گفته‌ام ولی در ذهنم درست درنمی‌آید. می‌گفتند اصحاب فیثاغورس کسی که سرّ ریاضی را فاش کند، می‌کشتند. اینها می‌گفتند همه عالم بر عدد بنا شده، بعد در محاسبه قطر مربع به‌عنوان ضلع واحد، خواستند جذر دو را بگیرند. قاعده فیثاغورس که کشف شد، مجموع مربع دو ضلع برابر است با مربع وتر. خب حالا اگر دو مربع‌های ضلع ما یک باشد، یک در یک، یک می‌شود و یک به اضافه یک، مجموع مساحت‌های دو مربع است، که دو می‌شود. مساحت وتر چند است؟ یک مربع داریم که مساحتش دو است، ضلعش چند است؟ شروع به جذرگیری کردند. بعد با برهان معلوم شد که این عدد، گنگ است. یعنی چه؟ یعنی شما اگر تا بینهایت هم جذر بگیرید، هیچ کجا به صفر نمی‌رسید.

شاگرد۴: در نفس الامرش ابهام دارد.

استاد: ابهام ندارد، چون یک نقطه روشنی روی محور است. اتفاقاً رادیکال دو، روی محور موجود است و رسم‌پذیر است؛ یعنی شما با رسم ریاضی نشانش می‌دهید. عدد پی (?) و ای (e: عدد نپر) رسم‌ناپذیر هستند؛ یعنی می‌دانیم روی محور هستند، اما نمی‌توانیم نشانش بدهیم. در رسم، بینهایت می‌توانیم به نقطه پی نزدیک شویم، ولی خودش را نمی‌توانیم نشان بدهیم و

بگوییم ببین این نقطه، نقطه پی است. اما راستکال دو که رسمپذیر است، یعنی شما با رسم با برهان قوی هندسی آن را نشان میدهید و میگویید ببین این نقطهی روی محور است، اما عدد گویا - از آن اعداد گویای فشرده - نیست و هیچکدام از آنها نمیتوانند باشند. این اعداد، گنگ است. ایشان بعداً با برهان میآورد و میگوید بنابراین محور کی خط پیوستهٔ که اعداد حقیقی هستند، اعضائی دارد که نمیتوان با اعداد طبیعی تناظر کی به کی برقرار کرد. از چیزهای جالب این است - نمیدانم آلآن هست یا نه؛ چند سال پیش بود - کی شکل مثلثهای حلزونی روی کتاب ریاضی بود. این شکل چکار میکرد؟ کی چیز ساده را به کسی که نگاهش میکرد، نشان میداد. میگفت کی زمانی کی عدد گنگ پیدا کردند، آن هم راستکال دو بود که هنگامه شد و به فیثاغورس گفتند چطور گفتی عدد، اصل است؟! یادم میآید که پارسال در همین مباحثه بود که راجع به اعداد متباین و مشترک صحبت کردیم. لذا مقادیر مهم بود. این شکل میگفت اول میگویید کی عدد گنگ پیدا کردید - که بحران اول ریاضیات همین بود. بحران شد و داد و فریاد شد - اما امروزه برای اهل ریاضیات مثل کف دست روشن است که مجموعه اعداد گنگ از اعداد گویای فشرده، بیشتر است. این خیلی مهم بود. آنچا کی زور یکی از این اعداد پیدا شده بود، چه هنگامهای به پا شده بود! آن شکل نشان میداد که وقتی آن شکل حلزون را روی محور باز کنید، نقاطی را نشان میداد؛ همه راستکالها را نشان میداد؛ همه راستکالهایی که گنگها در آن بودند. جایی که کامل بود و نبود و ... .

مطلبی که میخواهم بگویم، این است: این عظمتی که در اعداد گنگ پیدا شد -خودش هم دو بخش است: اعداد جبری و رسمپذیر و اعدادی که رسمپذیر هم نیست مانند عدد پی- آیا نماد، قدرت این را دارد که گویای فشرده باشد؟!

شاگرد۵: این شکل را میگویید؟




استاد: بله، اگر این را دور بزنید و روی محور بیاورید، عددهای گنگ –علاوه بر مجذورهای کامل- نشان میدهید. راستکال دو و راستکال سه و راستکال پنج و ... را نشان میدهید.

---

[1] الرحمن 4

بازبینی #2
ایجاد شده 26 ژوئن 2025 13:00:35 توسط ... .
به روزرسانی شده 26 ژوئن 2025 13:20:56 توسط ... .