مفهوم بردار

آنچه که جلسه قبل عرض کردم، این است: تعبیری بردار که الآن خیلی مهم است و جبر خطی هم مبتنی بر آن است، [نیاز است که به درستی شناخته شود]. جلوتر عرض کردم که اگر جبر دو ارزشی بولی نبود، اصلاً کامپیوتر نبود، چون صرف اعداد باینری که برای ما کامپیوتر درست نمی‌کند. کامپیوتر به پردازش نیاز دارد و حتماً باید در پردازش‌های مهم کامپیوتری، جبر دخالت داشته باشد. وقتی جبر دو ارزشی -صفر و یکی- وارد فضای اعداد باینری شد، آن وقت پردازش‌ها شروع شد. نظیر همین برای هوش مصنوعی بود. یعنی وقتی جبر خطی در پردازش‌ها وارد شد -که مهم‌ترینش همین پردازش زبان ما است که از آن صحبت می‌کنیم- هوش مصنوعی نبود. اگر آن نبود، این‌ها هم نبود. یعنی همه پیشرفت‌های امروزی، مبتنی بر آن است. لذا است که مفاهیم و مبادی جبر خطی دو روز دیگر جزو اطلاعات عمومی می‌شود و این‌ها باید به گوش ما خورده باشد. همین جور که الآن صفر و یک را نوعاً همه شنیده‌اند، چند روز دیگر مبادی این بحث هم عمومی می‌شود. به‌خاطر این‌که اساس این پیشرفت‌ها به این مطالب است.

در جلسه قبل ما یک صفحه‌ای را فرض گرفتیم و دو نقطه دو طرف آن گذاشتیم و سؤالاتی را مطرح کردیم؛ فاصله این دو نقطه، انواع فاصله‌ها، بستری که آن فاصله‌ها را شکل می‌داد. مطلبی که در این جلسه به دنبالش هستیم، انواع فاصله بین دو بردارِی است که عرض کردم. یعنی بین دو بردار انواع مختلفی از فاصله می‌توان تعریف و درک شود که ای نفس الامریت دارد ای اعتباری است. در این جلسه به دنبال این هستیم.

به اندازه فهم قاصر طلبگی خودم مثال‌هایی را عرض می‌کنم. اگر سرنخی شد، در ادامه، هر نکته‌ای به ذهن شریفتان آمد حتماً به ما هم بفرمایید. فعلاً برای این‌که فضای این دو بردار را توضیح بدهم و بگویم مفهوم فاصله این دو بردار به چه صورت می‌شود، مثال‌های ساده‌ای را خدمت شما عرض می‌کنم.

فرض بگیرید یک سنگرزه‌ای در محل ما مثل جدول مختصات در یک نقطه‌ای مثل نقطه صفر گذاشته شده است؛ محل تقاطع محور x و y، نقطه صفر است. حالا فرض بگیریم یک سنگ را در این نقطه صفر گذاشته‌ایم. در اینجا مطالب بسیار ساده‌ای پیش می‌آید. مثلاً عرض می‌کنم این سنگ را دو متر دست راست ببریم. ای می‌گوییم دو متر دست چپ ببریم. این مفهوم بسیار ساده‌ای است. الآن اگر کنار این سنگ منفی دو (-2) بگذاریم، یعنی دو متر آن را سمت چپ ببری و اگر کنارش مثبت دو (+2) بگذاریم، یعنی این سنگ را دو متر دست راست ببری. خب در همین نقطه صفر اگر بگوییم آن عددی نشان می‌داد که سنگ را سمت راست ای چپ ببری، صفر است؛ این سنگ را دست راست ای چپ نبری و اولی صفر باشد. حالا پارامتر دوم را بگوییم که دو متر آن را بالا ببری ای دو متر آن را پایین ببری. به شخصی درباره این سنگ دستور می‌دهیم و می‌گوییم راست و چپ بردنش صفر است، ولی عدد دوم، مثبت دو (+2) است، یعنی دو متر بالا ببرش. ای عدد دومش منفی دو (-2) است، یعنی دو متر پایین ببرش؛ این هم پارامتر دوم. حالا وقتی به این سنگ نگاه می‌کنیم، کنارش مثبت دو و مثبت دو (+2و+2) نوشته است. یعنی آن را هم دو متر دست راست ببر و هم دو متر بالا ببر. اینجا دیگر از روی یک محور در رفته است و شما باید دست راست و آن بالا در آن فضا بروید و به دنبالش بگردید. سنگ را که دو متر بالا و دو متر هم دست راست بردید، نقطه‌ای بیرون از خود محور می‌شود. الآن شما با تعیین دو پارامتر مربوط به دو بُعد، دارید حرکت آن سنگ و جای آن را معین می‌کنید.

حال برای همین سنگی که دو پارامتر را برای آن عرض کردم، یک پارامتر سومی اضافه کنید: میگوییدی دست راست و چپ نبر؛ یعنی عدد اولی صفر باشد، بالا و پایین هم نبر - لذا عدد دوم هم صفر است - بلکه دو متر جلو ببر. روی محور z دو متر جلو یا عقب ببر. منفی دو یا مثبت دو جلو یا عقب ببر. این هم روشن است؛ دو اولیها صفر و صفر، فقط جلو و عقب ببر. پارامتر سوم، مثبت میشود. حالا اگر سه عدد شد، مثبت دو، دومی هم مثبت دو است، سومی هم مثبت دو است. یعنی این سنگ را دو متر بالا ببر، دو متر به دست راست و دو متر به جلو ببر. الآن باید کجا به دنبالش بگردید؟ باید هم بالا بروید و هم دست راست بروید و هم دو متر جلو بروید. سه پارامتر دارد نشان میدهد که این کجا است.

حال الآن به این صورت فرض بگیرید که چند سنگ در اینجا داریم و کنار هر کدام از آنها نوشته که چطور آنها را ببریم. کنار یکی نوشته: منفی یک، مثبت دو، منفی سه (1-، 2+، 3-). سریع میدانید که باید چکار کنید؛ اولی میگویی به چپ ببر، دومی میگویی به بالا ببر، سومی میگویی به عقب ببر. خیلی روشن است. سه-چهار سنگ در اینجا هست که کنار هر کدام برچسب زده شده است. ببینید الآن که کنار هر سنگی سه عدد هست، یک نحو بردارسازی سنگ است. این سنگ را شما به یک بردارِ تبدیل کردهاید که دارد حرف میزند؛ حالا به هدف رسیده و دارد حرف میزند یا فعلاً ابتدای کار است و قرار است آن را ببرید. یک اطلاعاتی است که خصوصیات این سنگ را برای حرکت یا برای پایان آن نشان میدهد. این، سه پارامتر، سه تا آرایه است برای اینکه جای آن را نشان بدهیم.

خب حالا اگر به برچسبهای این سه سنگ نگاه کنید، بعد از اینکه رفتند، حالا میگوییم فاصله سنگ الف با سنگ ب چقدر است؟ شما چکار میکنید؟ اول فوری میبینید که بعد از حرکت کجا رفته و وقتی فهمیدید کجا رفته، حاصل سیر این سه پارامتر را که حساب کردید، بعد میگوییدآن سنگ آنجا است و دیگری هم آنجا است، پس فاصلهآنها این قدر است. این، یک جور فاصله مکانی دو بردار میشود که میگوییم فاصله این سنگها این اندازه است.

خب حالا بُعدها را اضافه میکنیم، ببینید ذهن شما همراهی میکند یا نه. به چند سنگی که کنارش برچسب زده بود، بُعدها را اضافه میکنیم. بله، میشود. مثلاً اولی که راست و چپ بود، دومی که بالا و پایین بود و سومی هم که جلو و عقب بود، چهارمی را زمان میگذاریم و مثلا میگوییم آن را یک ساعت ببر یا دو ساعت ببر. پارامتر چهارم دارد مقدار زمان حرکت را بیان میکند. خب پس شما یک سنگی دارید، فعلاً فرض ما این است که سرعتها مشترک است. مثلا همه آنها با سرعت پنجاه کیلومتر هستند که این سنگ را بالا، دست چپ و به جلو دو ساعت ببر. الآن پارامتر زمان و مقدار حرکت هم در کار آمد. این دارد جای سنگ را تغییر میدهد. کنار یکی نوشته بود دو ساعت ببر، دیگری نوشته بود یک ساعت ببر؛ با سرعت مثلاً ۵۰ کیلومتر در ساعت. نقطهای که پایان حرکت او است، پارامتر زمان حرکت او در آن نقطه تأثیر دارد.

شاگرد۱: اگر سرعت باشد نباید طول و عرض و ارتفاع مشخص باشد.

استاد: فعلاً سرعت مساوی است.

شاگرد۲: اگر زمان اضافه بشود سایر پارمترها متغیر میشوند.

استاد: بله، درست است. واحد کمیت با زمان تفاوت میکند. وقتی بعداً در جبر میآوردی، واحدهای مقدار را میتوانید به متغیر تبدیل کنید. مقصود من این است که ذهن شما ابعادی را در کار بیاورد.

شاگرد۳: حرکت میانی هم در همین راست و بالا تعریف میشود؟ ممکن است هزار تا زاویه قابل تصور باشد.

استاد: یعنی حرکت مستقیم نباشد؟ ما فعلاً مستقیم فرض گرفته‌ایم. ما حرفی نداریم که در برخی از جاها پارامترها خمیدگی هم باشد. من اینطور عرض می‌کنم تا ذهن ما آشنا شود. یکی از مشکل‌ترین چیزهایی که امروز هست...؛ هر جلسه یکی مشکل را می‌گوییم. یکی مشکل چارچوب بود؛ «Frame problem»، یکی هم جعبه سیاه بود؛ «Black Box problem»، یکی از مشکلاتی که امروز عرض می‌کنم، مشکلی که از آن تعبیر به بُعدهای لعنتی می‌کنند؛ بُعدهای نفرینی شده. یعنی گاهی این بُعدها به قدری سرسام‌آور می‌شود که به‌خاطر لوازم عجیبی که برای آن‌ها پیش آمده، اسم آن را بُعدهای لعنتی گذاشته‌اند. مقصود من این است که ذهنمان با ازدیاد بُعد آشنا بشود. در این فضایی که گفتیم چطور می‌شود که بُعد زمان و سرعت دخالت می‌کند که بعداً وقتی می‌خواهیم فاصله را بسنجیم، آن پارامترها در تعیین فاصله بین دو بردار دخالت می‌کند.

شاگرد۴: فاصله دو بردار به نحوی که نیاز به انتگرال‌گیری باشد؟ یا فاصله دو نقطه مقصدشان منظور است؟

استاد: الآن فاصله مقصدها دم نظرم هست. نسبت به حرکت‌ها عرض کردم که خاستگاه بردار، نیرو و حرکت و مکانیک کلاسیک بود. اما الآن دیگر اینطور نیست. آنجا فقط مقدار نیرو و جهت بود و کار درمی‌آمد. اما الآن که فقط با مقدار نیرو و جهت کار نداریم. ما با آرایه‌ها و بردارهایی سروکار داریم که مؤلفه‌های آن می‌تواند خیلی زیاد باشد. و لذا عرض کردم که فعلاً این لفظ "بردار" مانده است و الا الآن دیگر بردار نیست؛ الآن آن برداری که می‌گوییم، یک بستر است، یک کیسه و یک آرایه است که انسان باید به نحو تجریدی خودش، کم‌کم درک کند و از آن بردار به آن معنا فاصله بگیرد.

خب الآن زمان و مکان را هم دخالت دادیم، بعد می‌گوییم حالا که یک سنگ دو ساعت رفته، یک سنگ...؛ وقتی شما در پارامترها، زمان و مکان را می‌آوردی، شما با جهت - مثل چپ و راست - کار داری. ولو دو متری که قبلاً گفتیم کنار می‌رود. یعنی شما باید برای حرکت تعیین کنید که پارامتر اول مثبت است؛ یعنی دست راست است. پارامتر دوم مثلاً منفی است؛ یعنی به طرف پایین است. پارامتر سوم هم مشخص باشد و بگوید، زمان و مکان را بگوید. عدد پارامترها را می‌توانیم به‌صورت متغیر A+ یا +x بگذاریم.

شاگرد۵: زاویه را مشخص کنیم.

استاد: آن در مختصات قطبی است که زاویه می‌دهند. مختصات دکارتی، مختصات قائم است.

شاگرد۳: این فقط جهت را معین می‌کند.

استاد: بله، الآن زمان و سرعت دخالت کرد. برای اینکه بگوییم این موقعیت این دو سنگ کجا است تا فاصله دو سنگ را تعیین کنیم، باید همه این‌ها را در نظر بگیریم. همه این پنج-شش تا را باید در نظر بگیریم؛ سرعت، زمان حرکت، چپ و راست، بالا و پایین، جلو و عقب را باید در نظر بگیریم تا بگوییم وقتی سنگ‌ها به نقطه پایان حرکت رسیدند، فاصله آن‌ها چقدر است. تعیین فاصله دو سنگ به همه این‌ها نیاز دارد و باید نگاه کنیم.

خب حالا وقتی این سنگ‌ها حرکت می‌کنند، بگوییم هر کدام سیر بیشتری می‌کنند قیمتشان کم می‌شود. این هم یک چیزی است. شما بعداً قیمت را هم برای همه این سنگ‌ها دارید. مقداری که سیر کرده با اینکه قیمتش چقدر کم شده است. الآن آخر کار به جای اینکه بگویید فاصله این دو سنگ چقدر است، قیمت را می‌گویید. تا حالا وقتی می‌گفتید فاصل بین آن دو چقدر است منظورتان فاصله فیزیکی و مکانی دو نقطه بود. اما حالا می‌گوییم فاصله قیمتی سنگ الف و سنگ ب چقدر است؟ اینجا دیگر کاری به مکان نداریم. یعنی در فضا، یک پارامتر دیگری اضافه کردید؛ مثلاً سرعت در ازدیاد یا نقصان قیمت دخالت دارد. یک سنگی است که وقتی حرکت کرد

می‌گویی‌م قی‌مت‌ش زیاد می‌شود. لازم نکرده همه این‌ها یک جور باشند؛ مثبت و منفی می‌شود. یک سنگی است که وقتی می‌رود، منفی می‌شود، یکی هم هست که وقتی می‌رود، بیشتر می‌شود. پارامتر ازدیاد قیمت نسبت به حرکتی که می‌کند هم دخیل می‌شود. حالا می‌گویی‌م فاصله سنگ الف نسبت به سنگ ب چقدر است. چه فاصله‌ای؟ فاصله قیمتی آن‌ها چقدر است؟ وقتی این را می‌گویی‌د، اصلاً ذهن شما سراغ نقطه فیزیکی و این‌که چقدر از هم دور هستند، نمی‌رود. شما مثال‌های دیگری هم اضافه کنید.

این را برای چه عرض کردم؟ وقتی دو کمیت برداری دارید و می‌خواهید فاصله بین دو بردار را تعیین کنید، باید بگویید از چه حیث فاصله دارند. بردارها جورواجور و به حیث‌یات مختلف از هم فاصله‌ها دارند؛ فاصله‌هایی نسبت به حیثیت خاص. بعداً می‌بینید برای درک ظهور معانی و پردازش زبانی، خیلی اهمیت دارند؛ همان تعبیه‌ای که الآن می‌خواهم عرض کنم.

به این فضایی که تا به حال ترسیم کردیم، فضای برداری می‌گویند. یعنی شما یک فضایی دارید که در این فضا نسبت به تعداد ابعاد و تعداد پارامترهایی که در کنار سنگ نوشتید، مطلب و اطلاعات دارید. اگر قیمت هم جزء آن هست - شما که نسبت به سنگ‌ها و حرکت آن‌ها، یک فضای برداری دارید - یکی از چیزهایی که این بردارها وقتی در آن فضا دارند حرکت می‌کنند و بر اساس آن فاصله بین دو بردار را تعیین می‌کنید، فاصله قیمت بود. فاصله قیمت ربطی به فاصله مکانی نداشت. ولی فاصله قیمت دو بردار، باز هم در فضای برداری ما داخل است. چرا؟ چون ما که فضای برداری می‌گویی‌م، مقصودمان سه بُعد نیست. سه بُعد، شروع کار است. وقتی این‌جا فضا می‌گویی‌م، یعنی فضای ابعادی. اگر ده بُعد است، فضای برداری ما هم ده بُعد دارد، نه همان سه بُعد اولیه. لذا الآن ذهن ما با ابعادی آشنا شد که معانی بسیار وسیع‌تر از بُعد خطی به معانی طول و عرض و عمق دارد. با حیث‌یات مختلفی از ابعاد مواجه شده که این فضای برداری همه این حیث‌یات را سامان می‌دهد. یک فضای برداری داریم که صد بُعد دارد؛ بعدهای لعنتی‌ای که گفتم پیش می‌آید؛ مثلاً یک پیکره زبانی را که دارید تحلیل می‌کنید، یک دفعه می‌بینید برای کلمه، یک بردار تشکیل می‌دهد به چه طول عجیب و غریبی که در بعضی از انواعش، بیشترش صفر است؛ تعبیه‌ای که این مطالب را به عنوان مقدمه‌ای برای همین عرض می‌کنم.

شاگرد۶: اضافه‌ی این فضای بردار چیست؟ یعنی بردار را همان طول و عرض می‌بینند؟

استاد: نه، این مثال‌هایی که گفتم، شروع کار بود. الآن با یک بردارهایی مواجه هستیم که اصلاً جلو و عقب و بالا و پایین ندارد. بردارهایی است که در آن، قیمت و خریدار و کالا هست و اصلاً پیش و پس و بالا و پایین ندارد. متغیرهایی هست؛ مطلب مهمش همین است؛ یعنی در ادامه، وقتی یک بردار می‌گویی‌م، بردار یعنی اطلاعاتی که فعلاً عددی است و کنار یکدیگر ردیف شده‌اند و یک نظمی دارند. این مهم است. فقط مثال زدم تا در ذهن شریفتان از هندسه و خط شروع کنیم. سنگ‌هایی که مثال زدم، برای شروع بود و الا بعداً که می‌رویم، می‌بینید در بردار اصلاً کاری به این پارامترهای مکانی ندارید.

شاگرد۶: یعنی اضافه فضای برداری چه اضافه‌ای است؟ توضیحی است؟

استاد: هر بردار، مؤلفه‌هایی دارد. یعنی هر برداری، خودش یک نُرم دارد؛ انواع نُرم‌ها هست. بعداً با انواع نُرم‌ها، انواع فاصله‌ها به دست می‌آید. شما بین دو بردار، با نُرم‌های مختلف، می‌گویی‌د فاصله بین آن دو این اندازه است که یک عددی به شما می‌دهد. معنای این عدد، فاصله مکانی نیست. فاصله‌ای است که با یک فرمول به دست آمده است که البته فرمول‌های مختلفی وجود دارد. مثلاً یکی از آن‌ها، نُرم اقلیدسی است. شما با اِعمال یک فرمولی به یک عددی می‌رسید که عدد این بردار می‌شود و بعداً فاصله‌ها را سنجش می‌کنید.

شاگرد۷: هر ویژگی‌ای که قابلیت اختصاص دادن عدد به آن دارد، فضای برداری می‌شود؟ هر ویژگی که بتوان با عدد نشان داد.

استاد: هر متغیری که بتوان با یک چیزی نشان داد؛ ولو متغیر غیر عددی باشد؛ فعلاً اگر عدد باشد، خودش فی حد نفسه یک متغیر است و یک عددی را می‌پذیرد و این بُعدش صفر است.

شاگرد۸: فضای برداری می‌شود.

استاد: اگر ردیف شدند و اگر آرایه تشکیل دادند، بردار می‌شود.

شاگرد۴: قابل مقایسه با دیگری هستند.

استاد: اگر ماتریس تشکیل بدهند. ولی در خود بردار، لازم نیست که مقایسه صورت بگیرد. شما هر چیزی را می‌توانید به بردار تبدیل کنید. واژه "طواف" را در نظر بگیرید. می‌بینید "طواف" نوشته‌اند. بعد می‌بینید به ترتیب کنارش نوشته (۳، ۵، ۲۰،۳۰۰). می‌گویید یعنی چه کنارش به ردیف این اعداد را نوشته‌اند؟ می‌گویید عجب! عددهای کنارش، یعنی ما ۵۰ کتاب فقهی داریم؛ تعداد کاربرد واژه "طواف" در کتاب جواهر در باب طهارت اولی است و تعداد کاربرد واژه "طواف" در کتاب الصلاة دومی است. چرا زیاد شد و ۳۰۰ شد؟ به‌خاطر کاربرد "طواف" در کتاب حج است. الآن ببینید این، اطلاعات "طواف" است. یعنی "طواف" را به‌عنوان یک کلمه در یک پیکره زبانی که کتاب جواهر است، می‌بینید. کتاب جواهر یک پیکره (corpus) است. امروزه پیکره خیلی کاربرد دارد. پیکره‌ها مهم‌ترین کارهایی است که در هوش مصنوعی انجام می‌دهند. الآن جواهر، یک پیکره زبانی است. شما واژه "طواف" را می‌آوردی. اوالً واژه‌های پرکاربرد را حذف می‌کنید، واژه‌هایی هم که ردان هستند، حذف می‌کنید و بیانبین این‌ها را می‌آوردی. شما الآن "طواف" را به یک بردار تبدیل کرده‌ای؛ بردار تکرارهای آن در کتب فقه. خود همین "طواف" دارای یک اطلاعاتی است.

بازبینی #4
ایجاد شده در 5 مه 2026 13:01:28 توسط ... .
به روزرسانی شده در 7 مه 2026 12:53:16 توسط ... .