انفصال و گسستگی در پایه‌های مادی و بی‌نهایت بودن آن‌ها از نوع درجه اول

من عرض کردم در پایه‌ها می‌خواهیم چند چیز کنار هم قرار بگیرند؛ مثل یک کرسی ای شود که کسی بتواند روی آن بنشیند. منظور از پایه این است. یک امر ظهور می‌کند. کرسی به چه صورت است؟ هیئتی را فراهم می‌کند تا کسی روی آن بنشیند. اگر چوب‌های کرسی به‌تنهایی باشد، کسی نمی‌تواند روی آن بنشیند. باید این هیئت فراهم شود. از این، تعبیر به پایه می‌کنند و خیلی هم هست. البته سر و کار ما در پایه‌ها با بی‌نهایت است و حرفی نیست، اما بی‌نهایت درجه اول است. بی‌نهایت درجه دوم نه. چون مباحثه طلبگی است، من به‌عنوان طلبه چیزی را که مطالعه کرده‌ام، می‌گویم و شما هم که در سن جوانی هستید، پی آن را بگیرید: یکی از مهم‌ترین چیزهایی که بشر قرن بیستم به آن رسید و الآن هم نه ربطی به فلسفه دارد، و نه در آن، اختلافات فلسفی هست -ولو خواستند در آن تفلسف کنند، ولی اصل آن را نمی‌توانند کاری کنند - آن مطلب چه بود؟ مطلب عجیب و غریبی بود؛ این‌که مجموعه اعداد گویا، شمارش‌پذیر است. من مکرر گفته‌ام؛ کسانی که تشریف نداشتید پی آن را بگیرید. فقط به‌صورت اشاره‌ای عرض می‌کنم.

از مطالب خیلی ساده، این است که مثلاً در مجموعه اعداد طبیعی - که از یک شروع می‌شود و تا بی‌نهایت می‌رود - بین دو عضو از این مجموعه، دیگر نمی‌توانید چیزی از اعداد طبیعی پیدا کنید. وقتی سر و کارتان با اعداد طبیعی است، بین دو و سه، چه عددی است؟ هیچی. بعد از دو، سه است و بین آن‌ها چیزی نیست. همچنین اعداد صحیح مثبت و منفی. تمام اعداد صحیح به این صورت است، یعنی بین دو عضو از یک مجموعه، عضو دیگری نیست.

اما وقتی سراغ اعداد گویا می‌رویم، تعبیر بسیار مهم و اعجاب‌آوری است؛ وقتی آدم به آن فکر می‌کند واقعاً به‌تش می‌گیرد. مجموعه اعداد گویا چیست؟ یعنی آن عددی که از نسبت بین دو عدد حاصل می‌شود. الآن بین یک و دو، عددی نداشتیم، اما می‌گوییم یک دوم؛ یعنی نصف. دو سوم، سه چهارم. یعنی همین فاصله‌ای که بود، دو و یک سوم؛ بین دو و سه دارید عدد پیدا می‌کنید. این‌ها اعداد نسبی می‌شوند. اعدادی که مُنطَق و گویا هستند.

چیز عجیب و غریب این است که ریاضدان‌ها می‌گویند: مجموعه اعداد گویا فشرده است. این فشرده یعنی چه؟ خیلی مهم است. فشرده یعنی هر دو عدد گویا در هر کجا پیدا کنید، نه تنها بین آن‌ها فقط یک عدد نیست، بلکه دوباره بی‌نهایت عدد گویا است؛ خیلی است. اگر دو عدد گویا مثلاً یک دوم با یک سوم را با کسرها مدام به هم نزدیک کنید، بی‌نهایت جلو بروید و به جایی برسید که تصورش سخت است، باز بین آن دو عدد گویا، بی‌نهایت عدد گویا است. وقتی فکرش را می‌کنید، این فشردگی یک امر به‌آوری است. یعنی دوباره بین هر دو عضو، بی‌نهایت عضو از همان مجموعه هست؛ به این، فشردگی می‌گویند. این درکش ساده است.

اما آنچه که رهآورد قرن بیستم بود و بهآور است، این است - با برهانی که در فضای ریاضی ثابت شده - که میگویند: این مجموعههای اعداد گویا که فشرده است، شمارا است. شمارا به چه معنا است؟ یعنی تناظر یک به یک دارد با مجموعه اعداد طبیعی. از نظر قوهی بینهایت، با اعداد طبیعی یکی است. به اصطلاح این اعداد ترانسفینی، هر دویش الف صفر است. بین اعداد طبیعی فشرده نبود؛ بین هر دو عضوش چیزی نبود و فاصلهای نبود. این مجموعه اعداد طبیعی با اعداد گوییی که بین هر دو عضوش، بینهایت عضو است، ولی از نظر زور بینهایت بودن، این دو، یکی هستند. از نظر اعداد بینهایتها، هر دو، الف صفر هستند و شمارا. شمارا یعنی تناظر یک به یک دارد با مجموعه اعداد طبیعی.

شاگرد: الف صفر، به چه معنا است؟

استاد: الف صفر، نام عددهای بینهایتها است. عدد ترانسفینی میگویند؛ اعداد متعالی. الف صفر، اولین آنها است که همان اعداد طبیعی است و هر مجموعه بینهایتی که با اعداد طبیعی بینهایت اول، تناظر یک به یک داشته باشد، شمارا است؛ میتوانیم آن را بشماریم و درجه بینهایت بودنش با درجه اعداد طبیعی قوتش برابر است. این در قرن بیستم خیلی دستاورد مهمی است. مجموعه اعداد گویا، فشرده است، اما شمارااست. بروید فکر کنید و ببینید چه عجائبی بر این متفرع میشود. این برای اعداد گویا است و منفصله هم هست.

حال مهم این بود: مجموعه اعداد حقیقی ان شمارااست. یعنی نمیتوان آن را شمرد؛ تناظر یک به یک ندارند. از اینجا نتیجه میگیریم که مجموعه اعداد گویا هرچند فشرده است، اما به اندازه کافی فشرده نیست؛ تعبیری است که دارند. یعنی ولو بین دو عدد باز بینهایت عدد است، اما باز روی محور، نقاطی را پیدا میکنیم که گویا نیست و گنگ است. بینهایت عدد پیدا میکنیم...؛ مثل عدد پی که عرض کردم. اعداد گنگی که رسمپذیر است، مثل رادیکال دو که نشانش هم میدهیم؛ با خطکش و پرگار میگویند این نقطه را که میبینی، این نقطه، عدد گویا نیست. محال است بتوانید آن را به یک عدد گویا بیان کنید، ولی نقطه آن این است. پس معلوم شد اعداد گویا که این قدر گستردهاست، باز بینهایت عدد داریم که در مجموعه اعداد گویا نیست؛ این خیلی مهم است. و در اعداد غیرگویا، هم اعداد رسمپذیر و هم غیررسمپذیر هستند، مثل عدد پی که اصلا رسمپذیر نیست.

منظور من در اینجا چیست؟ چون در پایه، سر و کار ما با انفصال و ریاضیات گسستهاست...؛ ما میخواهیم حتما یک پایه درست کنیم، که در خصوص تموج پایه عرض میکردم که اگر از آن کوچکترش کنیم دیگر از بین میرود. هفته قبل این را توضیح دادم که اگر بخواهید این پایه را بهعنوان جزء لایتجزای مطلوب ما کوچکترش کنید، محال نیست که آن را بشکنید، اما آن پایههای که آن درش ظهور کرده بود، دیگر محو میشود. پس در پایههاسر و کار ما با اعدادی است که یک پایه را تشکیل میدهند. در آنجا سر و کار ما با پیوستههاست که بهصورت پیوسته عدد حقیقی باشد، بلکه ما میخواهیم پایه درست کنیم، لذا حتما باید عددی داشته باشیم ... . این جور به گمانم میآید. احتمال اینکه در پیوسته هم بیاید بعدا ممکن است، ولی فعلا اینطور در ذهن من است.

بنابراین ما بینهایت پایه داریم؛ بینهایتی از درجه اول، نه الف یک. الف یک، اعداد حقیقی است. یعنی همه این عددهای گنگ را هم ضمیمه کنید، خط محور میشود با حالت پیوسته. چون مجموعه اعداد گویا گسسته است. بین آن، نقاطی است که گویا نیست. ولی وقتی پیوسته شد، عدد حقیقی میشود که الف یک است. یعنی زور ِبینهایتش بیشتر از زور ِاعداد طبیعی است؛ به همان معنا که تناظر یک به یک ندارند. ریاضیدانهای قرن بیستم برای آن برهان آوردهاند که محال است بتوانید اعداد خط متصل پیوسته -اعداد حقیقی را- روی مجموعه اعداد طبیعی بشمارید و شمارا نیست. اما مجموعه اعداد گویا با اینکه فشرده است، شمارا است. این دستاورد خیلی مهمی است که

نواب ریاضی هزاران سال از این محروم بودند. الآن که من ِطلبه اینها را شنیده‌ام و خدمت شما می‌گویم، باید اینها را مهم بدانیم. ببینید چقدر گذشته! این مطلب بسیار مهمی در فضای است که ما به‌دنبال آن هستیم؛ برای چیزهایی که می‌خواهیم آنها را به‌عنوان جزء لایتجزی، به‌عنوان یک نقطه، به‌عنوان یک قطعه، در نظر بگیریم برای یک پایه.

شاگرد: پایه‌های بحث ما از سنخ عدد است که بینهایت می‌فرمایید؟

استاد: بله، چون می‌خواهیم مرکب درست کنیم. می‌خواهیم چند چیز را بیاوریم و ترکیب درست کنیم و از نظام ترکیبی یک مرکب، یک قدرتی ظهور داشته باشد. همین نظم را تغییر می‌دهیم و با یک ترکیب دیگری، چیز دیگری ظهور می‌کند. و به‌صورت طولی و عرضی است. جلوتر صحبتش شده است.

شاگرد: اینهایی که می‌فرمایید مگر معدود نیست؟ اما ما داریم عدد آن را می‌گوییم.

استاد: مثال پایه را عرض کردم. ساده‌ترین مثالش H_2O بود. H_2O ، یک پایه است. چه کار کردیم؟ دو تا از هیدروژن می‌آوردی و یک اکسیژن و یک کرسی درست می‌کنید؛ وقتی این‌ها به یک نحو خاصی توانستند این کرسی را برای ما درست کنند، آب پدید می‌آید. یعنی آب به‌عنوان چیزی که خواص و آثاری دارد، تا این کرسی نباشد، نیست. وقتی این کرسی فراهم شد، می‌آید. و اگر این را به هم بزنید، می‌رود.

شاگرد: یعنی اعداد که تا بینهایت است، ملازم با این است که صورتهای ترکیبی این هم بینهایت باشد؟

استاد: بله. صحبت سر همین است. یعنی ملازمه فیزیکی را می‌خواهید بگویید؟

شاگرد: بله.

استاد: منظور من که آن نیست.

شاگرد: پس مقصود چیست؟

استاد: نه، پشتوانه حرف من این است. یعنی آنجایی که بینهایت را دیدیم، آن نظام ریاضی، پشتیبانی می‌کند از انواع تموجهای پایه‌ای که در عوالم مختلف و در اشیاء مختلف پدید می‌آید.

بازبینی #4
ایجاد شده 14 سپتامبر 2024 16:45:58 توسط ... .
به روزرسانی شده 6 فوریه 2025 12:25:37 توسط ... .