# فصل اول) ریاضیات و بررسی سیر تاریخی هندسه

- ریاضیات در حکمت نظری
- علم هندسه

# ریاضیات در حکمت نظری

حکما یک تقسیم‌بندی از قبل دارند. می‌گویند حکمت نظری سه بخش است: الهیات، ریاضیات، طبیعیات[1]. الهیات، تمام‌ً غیر مادّی است، طبیعیات، تمام‌ً مادّی است. ریاضیات بینابین است. درکش، فهمش، مسائلش، غیر مادی است؛اما تحققش در دل ماده است. این چنین مطلبی می‌گفتند که ضمائمی هم نیاز دارد تا خوب سر برسد.[2]

---

[1] و ذكر أنّ النظريّة منحصرة في أقسام ثلاثة هي: الطبيعيّة، و التعليميّة، و الإلهيّة. و أنّ الطبيعيّة موضوعها الأجسام من جهة ما هي متحرّكة و ساكنة، و بحثها عن العوارض التي تعرض لها باذات من هذه الجهة. و أنّ التعليميّة موضوعها إمّا ما وهو كم مجرّد عن المادّة باذات، و إمّا ما وهو ذو كمّ. و المبحوث عنه فيها أحوال تعرض للكمّ بما وهو كمّ. و لا يؤخذ في حدودها نوع مادّة، و لا قوّة حركة. و أنّ الإلهيّة تبحث عن الأمور المفارقة للمادّة باللقوام و الحدّ.(الالهیات من کتاب الشفاء،ص۱۲)

[2] مرحوم شیخ بهائی در ابتدای خلاصه الحساب در مقام بیان موضوع علم چنین می فرماید: و موضوعه العدد الحاصل في المادّة كما قيل، و من ثمّ عدّ الحساب من الرّياضي، و فيه كلام. مصادر نزی پس از نقل کلام تفصیلی ابن سینا در بخش المنطق کتاب شفاء(ص ۱۳-۱۴) چنین می گوید: إنّ العارض للمادیات من العدد موضوع لعلم الحساب و إن كان البحث عنه هناك ليس من حيث العروض، بل من حيث التجرّد في الوهم(شرح و تعلیقه صدرالمتالهین بر الهیات شفاء،ص ۱۱)

# علم هندسه

علم هندسه از قدیمی‌ترین علوم است[1]. علمش هم علم بسیار جذابی است، دقیق است، کتاب‌های خوبی از هزاران سال، بشر برایش نوشته است . هندسه می‌گویند معرّب اندازه است[2]. ای آن‌ها که می‌گویند ژئومتری (Geometry)، Geo)) یعنی زمین و (metry) یعنی اندازه گیری .خاستگاه هندسه از ساحل نیل بوده است. زمین‌ها را که می‌خواستند کشاورزی بکنند، مساّحی زمین، اندازه‌گیری زمین می کردند. اصل هندسه، از اندازه‌گیری زمین بوده. ولی علمی است که بشر به راحتی درکش می‌کند، مثال‌هایش واضح است. عبارت معروف افلاطون هم که هست: من لم یتعلم الهندسه لا یدخلنّ المدرسه[3]. می‌خواسته بگوید تا هندسه ندانید، ذهن این طور منظم نیست.

برای مدرسه[4] نوشته بودند.

# هندسه اقلیدسی ؛ هندسه نا اقلیدسی

## اصل توازی اقلیدس

در مدرسه، معادله اصل پنجم را یاد گرفتیم - اقلیدس در تحریر اقلیدس این را به عنوان اصل موضوع پنجم قرار داده است.معروف شده است به اصل پنجم-می گفتند: یک خط مستقیم فرض بگیرید خیلی ساده .یک نقطه هم بیرون او.از این نقطه ای که بیرون این خط مستقیم است چند تا خط می توانیم موازی خط پایینی رسم کنیم که تا بی نهایت از طرفین ادامه دهیم این دو تا خط به هم نرسند؟چند تا؟من به خیالم بدیهی است.یکی[5].

تنها و تنها یک خط به موازات خط پایینی از این نقطه عبور می کند و می توانیم رسم کنیم که اگر تا بی نهایت می رود، به هم نرسد.خط موازی این است که هر چه ادامه بدهیم تا بی نهایت به هم نرسند.خیلی روشن است. خیلی روشن.اصل واضحی است بدیهی.

چند هزار سال نوابغ هندسه در فکر این بودند که این اصل پنجم را اثبات کنند[6]. نشد تا حدود دویست سال پیش.دیگر قضیه بحرانی شد و هندسه دانان خیلی بی باکی دل به دریا زدند[7]. مثل آن ها که آن طرف رفتند قاره آمریکا را کشف کردند.و دور زدند.این ها هم دل زدند به دریا و رفتند.

## تلاش نوابغ برای اثبات اصل توازی

قرن ظاهرا هجدهم بود.این طور که یادم می آید.همان زمانی که ریاضیدان های بزرگی آن زمان بودند. دو سه تا پیدا شدند که یکی‌شان روس[8] بود آمد گفت که علی ای حال ما باید در یک نظام اصول

موضوعی به تناقض برسیم دیگر.من فرض می گیرم یک خط مستقیم بیرونش یک نقطه ای از او دو تا خط در بشود و تا بی نهایت هم ادامه پیدا کند و این ها به هم نرسند. فرض می گیرم ببینم با آن چیزهایی که ما می دانیم و  خود این فرض یک جاهایی به تناقض می رسیم یا نه؟اگر به تناقض رسیدیم برهان خلف می فهمیم که  این فرض باطل بوده است.فثبت. این که می گویم او دل به دریا زد این بود.

رفت و این فرض را گرفت و رفت جلو و رفت و رفت تا آخر دید یک ساختمان قشنگ ریاضی برپا شد و به هیچ تناقضی هم نرسید. این بود که یک دفعه در فضای ریاضیات گفتند: اصل پنجم اصلا این طور نیست که ما خُلفش به تناقض برسیم.خُلفش را که در نظر بگیریم بگوییم دو تا خط موازی رسم می شود به تناقض می رسیم.

## هندسه هذلولوی یا لباچفسکی

این دستگاه به پا شد.شد یک هندسه مستقل به نام هندسه هذلولوی[9].لوباچفسکی[10] هذلولوی را تاسیس کرد.

اصل موضوع هندسه هذلولوی این است:می گوید هر خط مستقیمی یک نقطه بیرون او فرض بگیرید، لا اقل -بی نهایت هم که باشد، دیگر کرم الله لا حدود له- لا اقل دو خط رسم می شود به موازات آن خط که تا بی نهایت می روند و به هم نمی رسند.این شد اصل موضوع این هندسه.

## هندسه ریمانی یا بیضوی

ریمان[11] بعدش آمد؛ به هندسه او  می گویند هندسه ریمانی و حال آن که از نظر هندسی، هندسه ریمانی همان هندسه بیضوی است.یعنی سطوح منحنی مثبت. بعدش هم دیگر شروع شد.

این بحران این طور حل شد که هندسه اقلیدسی از اطلاق درآمد.شد یکی از هندسه های اصل موضوعی.کنارش هندسه های دیگر متعدد به پا شده است.

الان هم نمی خواهم بگویم درست است یا غلط. اصلا من در مقام تأیید نیستم .در مقام اطلاع بر این که چه گذشته است.این ها چه کار کردند.این فضاها چه بوده؟چه می گفتند؟چه می خواستند بگویند؟

### هندسه ریمانی؛ نظریه نسبیت

ولذا عرض کردم کتاب نسبیت نظریه خاص و عام که خود انیشتین نوشته است برای عموم  مردم که بفهمند حرف او را او می گوید من ابتدا باید قدردانی کنم از هندسه دانان. که راه را برای نظریه من صاف کردند[12].

یعنی اگر هندسه های نااقلیدسی نبود و هندسه هم چنان همان هندسه مطلق هندسه اقلیدسی بود اصلا نظریه نسبیت[13] هم نبود؛ چون مبنایش بر آن هندسه های نااقلیدسی است[14].

### هندسه های نااقلیدسی؛معلومات عمومی روز

الان زمان ما اطلاع بر هندسه های نااقلیدسی یک نحو معلومات عمومی روز است.معلومات عمومی است. تا آدم نمی داند در می شود؛ معلومات عمومی که ندانشته باشد آن تفکر درست او درک حتی در سطح معلومات عمومی نمی تواند جلو برود.این ها را نباید است که بداند.

الان کتاب های جوراجور را بخوانید حتی همین هایی که کلاسش رفته اید،منطق ریاضی ،غیر آن بسیاری جاها موجه می شوید که می گویند هندسه های نااقلیدسی. درست ای غلط را کار ندارم ولی بداند چه گفتند؛ وقتی بداند می بیند که مرتب با این بحث سروکار دارد.

---

[1] احتمالاً بابلیان و مصریان کهن، نخستین کسانی بودند که اصول هندسه را کشف کردند. در مصر هر سال رودخانه نیل طغیان می‌کرد و تواحی اطراف رودخانه را سیل فرا می‌گرفت. این رویداد تمام علایم مرزی میان املاک را از بین می‌برد و لازم می‌شد دوباره هر کس زمین خود را اندازه‌گیری و مرزبندی کند. مصریان روش علامت‌گذاری زمین‌ها با تیرک و طناب را ابداع کردند. آن‌ها تیرکی را در نقطه‌های مناسب در زمین فرو می‌کردند و تیرک دیگری در جای دیگر نصب می‌شد و دو تیرک با طنابی که مرز را مشخص می‌ساخت به یکدیگر متصل می‌شدند. با دو تیرک دیگر زمین محصور شده و محلی برای کشت یا ساختمان سازی مشخص می‌شد.(سایت ویکی پدیا)

[2] المُهَنْدِسُ: الذي يقدر مجاري القنى، و مواضعها حيث يحتفر، و هو مشتق من الهندزة، فارسي صيرت الزاي سينا، لأنه ليس بعد الدال زاي في شيء من كلام العرب (كتاب العين ؛ ج4 ؛ ص120)و المهندِس: الذي يقدّر مجاريَ القُنِيِّ واحتفارَها، و هو مشتق من الهَنْدَزا، و هي فارسية أصلها أَوَاَندازا أي: مقدّر الماء. (تهذيب اللغة ؛ ج6 ؛ ص276)هندسه:(اسم)[معرب، م‌أخوذ از پهلوی: handāzak (= اندازه] (ریاضی)علمی که درباره اشکال و ابعاد و اندازه‌گیری بحث می‌کند.(فرهنگ عمید)

[3] و اعلم أنّ الهندسة تفيد صاحبها إضاءة في عقله و استقامة في فكره لأنّ براهينها كلّها بيّنة الانتظام جليّة الترتيب لا يكاد الغلط يدخل أقيستها لترتيبها و انتظامها فيبعد الفكر بممارستها عن الخطإ و ينشأ لصاحبها عقل على ذلك المهيع و قد زعموا أنّه كان مكتوبا على باب أفلاطون: «من لم يكن مهندساً،فلا يدخلنّ منزلنا» و كان شيوخنا رحمهم الله يقولون: «ممارسة علم الهندسة للفكر بمثابة الصابون للثوب الدّيء يغسل منه الأقذار و ينقّيه من الأوضار و الأدران». و إنّما ذلك لما أشرنا إليه من ترتيبه و انتظامه.( تاریخابن‌خلدون،ج1،ص:640)

[4] الأكاديميا هي المدرسة التي اسسها (افلاطون) عام ٣٨٧ ق. م في بستان على ابواب اثينا يسمّى (الأكاديموس)، فدرس فيها الرياضيات و الفلسفة، و كتب على بابها: من لم يكن مهندسا فلا يدخل علينا.( المعجم الفلسفي بالألفاظ العربية و الفرنسية و الإنكليزية و اللاتينية، جلد: ١، صفحه: ١١٣)

[5] تَوازی، اَصْل، اصل پنجم از اصول موضوع ای مصادرات هندسۀ اقلیدسی که امروزه آن را به صورتی که به نام پلیفر (1748-1819م/1161-1234ق) معروف شده است، می‌شناسیم: «از نقطه‌ای مفروض [در خارج یک خط] می‌توان یک خط و تنها یک خط به موازات آن رسم کرد» (گرینبرگ، 16-17).

اقلیدس (ه م) در مقالۀ نخست اصول، فهرستی از پیش ـ فرض‌های بنیادین هندسۀ خود متشکل تعاریف، اصول متعارف و اصول موضوع (مصادرات) آورده است که مناقشه‌انگیزترین آن‌ها اصل پنجم است که در آن چنین می‌گوید: «اگر خط راستی دو خط راست دیگر را چنان قطع کند که در یک سو زاویه‌های داخلی با مجموع کمتر از دو قائمه پدید آورد، اگر آن دو خط به مقدار نامعلومی امتداد

داده شوند، در همان سو با هم برخورد می‌کنند» (هیث، I/155).

(دانشنامه بزرگ اسلامی، ج ۱۶، ص ۶۱۴۵)

اصل پنجم اقلیدس اقلیدس در کتاب اصول اقلیدس هندسه‌ای را می‌گذاشت، که به مدت بیش از دو هزار سال تنها هندسه موجود بود، پنج اصل موضوع و پنج اصل متعارفی را به عنوان اصول بدیهی و بدون نیاز به اثبات پذیرفت تا بتواند بقیه قضایای هندسی را اثبات کند. اصل پنجم آن‌گونه که اقلیدس بیان کرد این‌گونه است: اگر دو خط راست با سومی طوری قطع شوند، در همان طرفی از خط سوم که زوایای داخلی، مجموع کوچکتر از دو قائمه تشکیل می‌دهند یکدیگر را قطع می‌کنند. این اصل در شکل امروزی آن این‌گونه بیان می‌شود: اگر دو خط به وسیله مورب چنان قطع شوند که مجموع اندازه درجه‌های دو زاویه درونی واقع در یک طرف مورب کمتر از 180 درجه باشد، آن‌گاه این دو خط یکدیگر را در همان طرف مورب تلاقی می‌کنند. شکل مشهورتر این اصل که امروزه در دبیرستان تدریس می‌شود و به اصل توازی اقلیدسی مشهور است عبارت است از: به ازای هر خط l و نقطه p غیر واقع بر آن تنها یک خط مانند m وجود دارد چنان‌که l از p می‌گذرد و با l موازی است. این اصل را به این شکل نخستین بار جیروالمو ساکری طرح کرد. چند جانشین دیگر برای این اصل پیشنهاد شده است: حداقل یک مثلث وجود دارد که مجموع سه زاویه آن برابر با 180 درجه است. دو مثلث متشابه غیر متساوی وجود دارند. دو خط مستقیم وجود دارند که همه جا از هم به یک فاصله‌اند. بر هر سه نقطه غیر واقع بر یک خط می‌توان دایره‌ای گذراند. بر هر نقطه داخل زاویه‌ای کمتر از 60 درجه می‌توان خط مستقیمی کشید که هر دو ضلع زاویه را قطع کند(مجله علمی رایشمند، اصل پنجم اقلیدس)

[6] نکته اصلی اینجا ست که اقلیدس از این اصل تا پیش از قضیه 29 از کتاب نخست اصول به‌رغم امکان ساده سازی اثبات قضایای پیش از آن، استفاده نکرده که این امر به نظر برخی حاکی از عدم تمایل او برای اصل قرار دادن آن است (هوم، 119؛ وخندایکی، 252)؛ ولی به این منظور او ناچار می‌بود، آن را با استفاده از مقدمات دیگر و 28 قضیه نخست ثابت کند. این آرمانی است که بسیاری از هندسه‌دانان بعدی طی بیش از دو هزار سال درصدد تحقق آن برآمدند. کوشش‌های بسیاری برای اثبات این اصل صورت گرفت که بیشتر آنها نادرست و اغلب متضمن اثبات قضیه‌های همارز خود اصل پنجم بودند.
از کسانی که در سنت اسکندرانی برای تعریف یا نظریه‌پردازی درباره اصل توازی تلاش کردند می‌توان به ارشمیدس (ه م)، پوسیدونیوس (135-44ق‌م)، بطلمیوس (ه م)، پرُکلُس (ه م)، اغانیس (که تنها از طریق آثار عربی شناخته شده است)، و سرانجام سیمپلیکیوس (اواخر سده 5 و نیز نخست سده 6 م) اشاره کرد.

اصول اقلیدس از جمله آثاری است که با آغاز توجه مسلمانان به آثار یونانی ترجمه شد و از همان ابتدا شروح مختلفی به زبان عربی بر آن نوشته شد(نک : GAS,V/105-120). به نظر برخی «مرحله عربی تاریخ اصول»، دارای متنوع‌ترین وجوه و بیشترین خلاقیت بوده است و در مقام مقایسه، هیچ بحث زنده و خلاقی نظیر متون عربی، درباره اصل توازی و دیگر مقدمات کتاب اصول، در متونی که در سده‌های بعد به لاتینی نوشته شد، دیده نمی‌شود («زندگینامه...2»، IV/448). (دانشنامه بزرگ اسلامی، ج ۱۶، ص ۶۱۴۵)

فهرست تلاش هایی از ریاضیدانان مسلمان و غیرمسلمان برای اثبات این اصل را می توان در دانشنامه و همین طور مقاله اصل توازی اقلیدس در سایت ویکی فقه مشاهده نمود.

[7] تلاش‌هایی که برای اثبات اصل پنجم اقلیدس صورت گرفته بود به اندازه‌ای زیاد بود که گ.ز.کلوگل (G. S. Klugel) در سال 1763 موفق شد رساله‌ای برای دکترا تهیه کند که در آن نقایص 28 برهان مختلف از اصل توازی را پیدا و در ثابت شدنی بودن آن اظهار تردید کند.

دایرةالمعارف نویس و ریاضیدان فرانسوی ژ.ل.ر.دالامبر(J.L.R.d Alember) این وضع را "افتضاح هندسه" نامیده بود. اصل توازی همچون اعوجاجی در هندسه اقلیدسی بود. **بیش از دو هزار سال ریاضیدانان تلاش می‌کردند که به گونه‌ای آن را مرتفع سازند، اما همواره با شکست روبه رو می‌شدند.** ریاضیدانان به تدریج نومید می‌گشتند.

فورکوش بویوئی(Bolyai) مجارستانی به پسرش یانوش نوشت: "تو دیگر نباید برای گام نهادن در راه توازی‌ها تلاش کنی. من پیچ و خم‌های این راه را از اول تا آخر آن می‌شناسم، این شب بی‌پایان را که همه روشنایی و شادمانی زندگی مرا به کام نابودی فرو برده است سپری کرده‌ام. التماس می‌کنم که دانش موازی‌ها را رها کنی. من در این اندیشه بودم که خود را در راه حقیقت فدا کنم. حاضر بودم شهیدی باشم که این نقص هندسه را مرتفع سازد و پاک شده آن را به عالم بشریت تقدیم نماید. من زحمتی عظیم و سترگ کشیدم. آنچه را که من آفریدم به مراتب برتر از آفریدهٔ دیگران است. ولی باز هم رضایت خاطر به دست نیاوردم... وقتی دریافتم که هیچ کس نمی‌تواند به پایان این شب ظلمانی راه یابد، بازگشتم. بیتسلای خاطر بازگشتم، در حالی که برای خود و بشریت متأسف بودم... من مدتها در این دیار بوده‌ام و به تمامی مخرج‌های جنمی این دریای مرده سفر کرده‌ام و همیشه هم با دلی شکسته و بادبان پاره پاره برگشته‌ام. تباهی وضع و سقوط من به آن دوران باز می‌گردد. من از روی بیفکری زندگانی و خوشبختایم را به مخاطره افکندم" (همان، ص 132).

این ناکامیها نشانهٔ بروز بحرانی جدی در پارادایم اقلیدسی بود. جالب آنکه ریاضیدانان که معمولاً تصور می‌شود به لحاظ نوع فعالیتی که انجام می‌دهند، افرادی منطقی‌اند به مدت بیش از دو هزار سال بر این فکر پای فشردند که اصل پنجم اقلیدسی، اصلی وابسته به سایر اصول است و بهرغم تلاشهای بیشمارشان در جهت اثبات آن که همواره با شکست مواجه می‌شد، هیچگاه بدین فکر نیفتادند که شاید اصل توازی واقعاً یک اصل باشد؛ اصلی مستقل از سایر اصول. گرچه در این مدت عده انگشت‌شماری با این تصور حاکم بر جامعه ریاضی مخالفت نمودند، اما جامعه ریاضیدانان هیچگاه بدانها اجازه بروز ندادند. تا اینکه در قرن نوزدهم چند تن از ریاضیدانان همزمان به این موضوع اندیشیدند که شاید اصل اقلیدس اصلی مستقل از سایر اصول باشد.

۴ـ انقلاب نااقلیدسی

یانوش بویوئی از اخطار پدر نهراسید؛ زیرا اندیشه کامل‌تازه‌ای را در سر می‌پروراند. او فرض می‌کرد که نقیض اصل اقلیدس حکمی بی‌معنا نیست. وی در 1823 به پدرش چنین می‌نویسد:

"چیزهایی که کشف کرده‌ام به اندازه‌ای شگفت‌انگیزند که خودم حیرت زده شده‌ام و بدبختی جبران‌ناپذیری خواهد بود اگر اینها از دست بروند... در شرایط کنونی، تنها چیزی که می‌توانم بگویم این است که از هیچ، دنیایی تازه و شگفت‌انگیز آفریده‌ام" (همانجا، ص 132). پدر یانوش کار وی را برای گواس (Gauss) شاهزاده ریاضیدانها فرستاد. اما برخورد سرد گواس موجب سرخوردگی یانوش شد؛ به گونه‌ای که هرگز به فکر انتشار پژوهشهایش نیفتاد.

اما شواهدی در دست است که گواس پیشتر از بویوئی به برخی اکتشافات هندسه نااقلیدسی دست یافته بوده است. در 1817 گواس به و.السبرس (W. Olbers) نوشت: "دارم بیش از پیش متقاعد می‌شوم که لزوم اینکه هندسه ما باید اقلیدسی باشد، دست کم نه با عقل آدمی و نه برای عقل آدمی، نمی‌تواند اثبات شود. شاید در حیاتی دیگر بتوانیم بینش درونی از ماهیت فضا به‌دست آوریم که اکنون دست یافتنی نیست " (همان، ص 149). وی در نامه‌ای دیگر در 1824 به ف.آ.

تاوریونوس (F.A. Taurinus) می‌گوید: "پذیرفتن این‌که مجموع سه زاویه کمتر از180 باشد, به هندسهٔ شگفت‌انگیزی منجر می‌شود که با هندسه اقلیدسی ما به کلی متفاوت، اما کاملاً سازگار است و من آن را بسط داده‌ام و کاملاً از آن راضی هستم... همه تلاش‌های من برای یافتن یک تناقض ای یک این‌سازگاری در این هندسه نااقلیدسی به شکست انجامیده است... چنین به‌نظر می‌رسد که به‌رغم گفته‌های خردمندآبانه حکمای مابعدالطبیعه، باید گفت که ما درباره ماهیت واقعی فضا بسیار کم می‌دانیم، ای بهتر بگویم اصلاً نمی‌دانیم تا بگویم که فلان امر مطلقاً غیر ممکن است, فقط به این دلیل که غیرعادی به‌نظر می‌رسد" (همان، ص 151).

وی در جای دیگری از این‌همه‌اش می‌نویسد: "پروا ندارم از این‌که آنچه گفتم, مورد سوء تعبیر کسانی واقع شود که به ظاهر ذهن ریاضی اندیشی دارند؛ ولی درهرحال، این را به عنوان یک این‌همه خصوصی تلقی کنید که به هیچ وجه مورد استفاده عمومی ای مورد استفاده‌های که به نحوی صورت تبلیغ پیدا کند، قرار نگیرد. شاید خودم در آینده، هنگامی که نسبت به امروز, فراغت بیشتری دست دهد، بررسی‌هایم را منتشر سازم" (همان)، اما گاوس هیچگاه آثار خود را منتشر ننمود، چرا؟

منظور گاوس از "حکمای مابعدالطبیعه" در این‌همه‌اش، پیروان کانت بودند. کشف هندسه نااقلیدسی به دست گاوس، این نظر کانت را که فضای اقلیدسی ذاتی ساختار ذهن ماست، در می‌کرد. از آنجا که فلسفه کانت در اواخر سده هیجدهم و بیشتر سده نوزدهم در سراسر اروپا رواج داشت، اظهارات گاوس می‌توانست منجر به کشمکش‌ها و حملات فراوانی به وی گردد. از این رو, گاوس از علنی ساختن آثار انقلابی‌اش عملاً بیمناک بود. باید توجه کرد که گاوس یک ریاضیدان معمولی زمان خویش نبود؛ او کسی بود که لئوپولد کرونکر (Kronecker) درباره‌اش چنین می‌گوید: "تکامل تدریجی و توسعه منظم دانش حساب و تقریباً تمام آنچه در ریاضیات قرن ما (نوزدهم) انجام گرفت, در خط سیر افکار بدیعی بوده است که به وسیله گاوس داده شد" (بنقل از تمپل بل، 1363، ص 250).

هاورد ایوز (Howard W.Eves)نیز وی را چنین توصیف می‌کند:"قرون هیجدهم و نوزدهم در زیر سیطره ریاضی پر صلابت کارل فردریش گاوس، همچون گستره خلیج رودس در زیر پای تندیس عظیم آپولون قرار دارد." وی را عموماً بزرگترین ریاضیدان قرن نوزدهم و همراه با ارشمیدس و نیوتن، یکی از بزرگترین ریاضیدانان همه اعصار برشمرده‌اند" (ایوز، 1368، ص167). اهمیت علمی گاوس تا بدان درجه است که وی شهزاده ریاضیدانان نامیده شده است. با وجود این اعتبار علمی، گاوس در برابر جامعه‌ای که غرق در هندسه اقلیدسی بود، جرأت اظهار نظرهایش را نداشت.

تصور عموم از ریاضیدانان چنان است که آنها هر نظریه ریاضی را با معیار و مالک منطق، درستی استدلال‌ها و سازگاری آن می‌سنجند و در صورتی که نظریه‌ای واجد این شرایط باشد, در برابر آن سر تسلیم فرود می‌آورند. اما به نظر می‌رسد که پذیرش و مقبولیت یک نظریه در یک جامعه علمی بستگی دارد به این که برای جامعه مورد نظر چه چیزی مهم باشد و یا به چه امری ارزش بنهد. برای جامعه ریاضی قرن نوزدهم که نه‌تنها هندسه اقلیدسی را تنها تبیین‌کننده عالم هستی می‌دانست, بلکه شیوه ادراک ما از عالم هستی را به صورت هندسه اقلیدسی می‌دانست، تنها مسائلی که برایش مهم بودند، قوام بخشیدن به این هندسه و رفع مشکلات آن بود. واضح است که در این صورت, بیان هندسه دیگری نمی‌توانست از منزلت چندانی برخوردار باشد و اعتراضات شدیدی را در پی‌داشت. این بدان معنا نیست که پیروی از منطق و سازگاری یک نظریه ریاضی در پذیرش آن مورد توجه ریاضیدانان قرار نمی‌گیرد؛ بلکه متذکر این نکته است که منطق تنها عامل پذیرش یک نظریه نیست؛ بلکه تعلقات متافیزیکی جامعه علمی نیز در آن مؤثر است و گاهی این تأثیر بسیار عمیق‌تر از تأثیر عوامل منطقی و ریاضی است؛ به‌طوری که ریاضیدان شهیری مثل گاوس, بیم بیان نظرهایش را درباره هندسه نااقلیدسی دارد. حتی نیکلای لباچفسکی (Lobachevsky) که در سال 1829 جرأت انتشار مقاله‌اش در باب هندسه نااقلیدسی را یافت، نتوانست توجه جامعه علمی را بخود جلب کند.

حال این پرسش مطرح می‌شود که سرانجام، چگونه هندسه نااقلیدسی مورد پذیرش قرار گرفت؟ جالب‌ترین نکته این داستان در این‌جاست که تا وقتی مکاتبات گاوس پس از مرگ او در سال 1855 منتشر نشده بود، جهان ریاضی هندسه نااقلیدسی را جدی نگرفت. عینی آنچه که سبب مقبولیت هندسه نااقلیدسی شد، شهرت ریاضی همان گاوسی بود که خودش جرأت انتشار آثارش درباره هندسه نااقلیدسی را نداشت. همین شهرت سبب شد عده‌ای از بهترین ریاضیدانان، همچون بلترامی (Beltrami)، کلاین (Klein)، پوانکاره (Poincare) و ریمان (Rieman)موضوع را جدی گرفتند و بسط دادند و آن را در شاخه‌های دیگر ریاضیات به کار بردند و همین سبب مقبولیت هندسه نااقلیدسی شد. آنچه که در پذیرش هندسه نااقلیدسی نقشی تعیین‌کننده‌ای ایفا کرد، این سخن پر بصیرت و ژرف کوهن بود که در گزینش میان نظریه‌های علمی "هیچ معیاری بالاتر از توافق جامعه مربوطه وجود ندارد" (kuhn;1970,p.94). و این معیار وابسته به ارزش‌ها و معیارهای فرامعرفتی آن جامعه است. در 1868 بلترامی برای آخرین بار مسأله اثبات اصل توازی را پیش کشید و ثابت کرد که اثبات آن غیر ممکن است! او این کار را از این راه که هندسه نااقلیدسی درست مثل هندسه اقلیدسی، هندسه‌ای سازگار است، اثبات نمود. همچنین در سال 1854 ریمان با گذاشتن اصل دیگری بجای اصل توازی، هندسه جدیدی را بنا نهاد. در این هندسه، از یک نقطه غیر واقع بر یک خط هیچ خط، موازی با آن خط نمی‌گذارد.(مقاله هندسه نااقلیدسی، انقلابی پارادایمی در ریاضیات)

[8] لوباچفسکی

[9] هندسه‌های نااقلیدسی از مطالعه‌ٔ عمیق‌تر موضوع توازی در هندسه‌ٔ اقلیدسی پیدا شده‌اند. دو نیم‌خط موازی عمود بر پاره خط PQ را در نمودار شماره ۱ در نظر بگیرید.

در هندسه‌ٔ اقلیدسی فاصله‌ٔ (عمودی) بین دو نیم‌خط هنگامی که به سمت راست حرکت می‌کنیم فاصله‌ٔ P تا Q باقی می‌مانند؛ ولی در اوایل سده‌ٔ نوزدهم دو هندسه‌ٔ دیگر پیشنهاد شد. یکی هندسه هذلولوی (از کلمه‌ٔ یونانی هیپربولیک به معنی «مبالغه‌کردن») که در آن فاصله‌ٔ میان نیم‌خط‌ها افزایش می‌یابد و دیگری هندسه‌ٔ بیضوی که در آن فاصله رفته‌رفته کم می‌شود و سرانجام نیم‌خط‌ها همدیگر را می‌بُرند.در شکل زیر،خط موازی مطابق هندسه اقلیدسی در وسط،هندسه بیضوی در سمت راست و هندسه‌ی هذلولوی در سمت چپ قابل مشاهده است.




هندسه هُذلولوی یکی از هندسه‌های نااقلیدسی است که به هندسه لباچفسکی نیز مشهور است.

(سایت ویکی پدیا)

[10] نیکلای ایوانوویچ لوباچفسکی (به روسی: ?????? ??????? ?????????) (فرزند پراسکوفیای الکساندروفنا و ایوان ماکسیموویچ لباچفسکی) (زاده ۱۱ آذر ۱۱۷۱ / ۱ دسامبر ۱۷۹۲ [۲۰ نوامبر در اوستان نیژنی نووگورود امپراتوری روسیه – درگذشته ۴ اسفند ۱۲۳۵ / ۲۴ تقویم ژولینی]

فوریه ۱۸۵۶ در قازان)، ریاضیدان روس بود. لوباچفسکی، هر چند دربارهٔ موضوعات متنوعی از قبیل مکانیک، اخترشناسی، نظریهٔ احتمالات، تحلیل ریاضی (آنالیز)، و جبر پژوهش کرد و مقاله و کتاب نوشت اما نام او را فعالیت در زمینهٔ هندسه و ابداع هندسهٔ نااقلیدسی در تاریخ ماندگار کرد. امروزه اغلب هندسه هذلولوی را به نام او هندسه لوباچفسکی می‌نامند.

لوباچفسکی اولین کسی بود که عملاً مقاله‌ای در زمینهٔ هندسهٔ نااقلیدسی نوشت او در ۱۲۰۸ ه.ش راز کار در آن زمان درباره هندسه‌های نااقلیدسی نوشت اما به دلیل دور بودن روسیه از کانون‌های علمی در ۱۸۲۹ م. مقالهٔ خود را به روسی نوشت او چندان مورد توجه واقع نشد و اینوش ویویی بدون اطلاع از کار لوباچفسکی دو سال بعد در ۲۶ صفحه‌ای کتاب تنتامن که توسط پدرش فورکوش ویویی نوشته شده بود مطالبی همه‌ی درباره هندسهٔ نااقلیدسی نوشت. چند سال بعد از مرگ لوباچفسکی ارزش کارهای او قدر دانسته شد و به عنوان بنیان‌گذار یکی از هندسه‌های اقلیدسی که در سطح هذلولوی صادق است و طبق آن از یک نقطه خارج یک خط بی‌نهایت خط به موازات آن می‌توان کشید شناخته شد. اکنون در کنار هندسه اقلیدسی چند هندسهٔ دیگر وجود دارد که مهمترینشان یکی هندسهٔ لوباچفسکی ای هذلولی و دیگری هندسه ریمانی ای هندسه بیضوی است. پس از کارهای فلیکس کلاین از آغاز قرن بیستم، مبنای جدیدی برای طبقه‌بندی هندسه‌ها ایجاد شده‌است(سایت ویکی پدیا)

[11] گئورگ فردریش برنهارد ریمان آلمانی: [??i:man] (۱۷ سپتامبر ۱۸۲۶ – ۲۰ ژوئیه ۱۸۶۶) ریاضیدان آلمانی بود که کارهایش در زمینهٔ آنالیز و هندسه دیفرانسیل پایهٔ ریاضی نظریه نسبیت عام شد. ریمان یکی از تأثیرگذارترین ریاضیدانان قرن نوزدهم میلادی بود و اگرچه آثار کمی منتشر کرد، اثری شگرف بر ریاضیات قرن بیستم گذاشت و نام او در جاجای نظریات و اصطلاحات ریاضی دیده‌می‌شود. (سایت ویکی پدیا)

[12] در قرن نوزدهم دو ریاضیدان بزرگ به نام «لباچوفسکی» و «ریمان» دو نظام هندسی را صورت بندی کردند که هندسه را از سیطره اقلیدس خارج می کرد. صورت بندی «اقلیدس» از هندسه تا قرن نوزدهم پررونق ترین کالای فکری بود و پنداشته می شد که نظام اقلیدس یگانه نظامی است که امکان پذیر است. این نظام بی چون و چرا توصیفی درست از جهان انگاشته می شد. هندسه اقلیدسی مدلی برای ساختار نظریه های علمی بود و نیوتن و دیگر دانشمندان از آن پیروی می کردند. هندسه اقلیدسی بر پنج اصل موضوعه استوار است و قضایای هندسه با توجه به این پنج اصل اثبات می شوند. اصل موضوعه پنجم اقلیدس می گوید : «به ازای هر خط و نقطه ای خارج آن خط ، یک خط و تنها یک خط به موازات آن خط مفروض می تواند از آن نقطه عبور کند.»

هندسه لباچوفسکی و هندسه ریمانی این اصل موضوعه پنجم را مورد تردید قرار دادند. در هندسه ریمانی ممکن است خط صافی که موازی خط مفروض باشد از نقطه مورد نظر عبور نکند و در هندسه لباچوفسکی ممکن است بیش از یک خط از آن عبور کند. با اندکی تسامح می توان گفت این دو هندسه منحنی وار هستند. بدین معنا که کوتاه ترین فاصله بین دو نقطه یک منحنی است.

هندسه اقلیدسی فضای را مفروض می گیرد که هیچ گونه خمیدگی و انحنا ندارد. اما نظام هندسی لباچوفسکی و ریمانی این خمیدگی را مفروض می گیرند. (مانند سطح یک کره) همچنین در هندسه های نااقلیدسی جمع زوایای مثلث برابر با ۱۸۰ درجه نیست. ظهور این هندسه های عجیب و غریب برای ریاضیدانان جالب توجه بود اما اهمیت آنها وقتی روشن شد که نسبیت عام اینشتین توسط بیشتر فیزیکدانان به عنوان جایگزینی برای نظریه نیوتن از مکان ، زمان و گرانش پذیرفته شد. چون صورت بندی نسبیت عام مبتنی بر هندسه زمان و مکان به جای آن مکان به

جای آن که صاف باشد منحنی است.

نظریه نسبیت خاص تمایز آشکاری میان ریاضیات محض و ریاضیات کاربردی است. هندسه محض مطالعه سیستم های ریاضی مختلف است که بوسیله نظام های اصول موضوعه متفاوتی توصیف شده اند. برخی از آنها چند بعدی و یا حتی n بعدی هستند. اما هندسه محض انتزاعی است و هیچ ربطی به جهان مادی ندارد ، یعنی فقط به روابط مفاهیم ریاضی با همدیگر ، بدون ارجاع به تجربه می پردازد. هندسه کاربردی ، کاربرد ریاضیات در واقعیت است. هندسه کاربردی به واسطه تجربه فرارگرفته می شود و مفاهیم انتزاعی بر حسب عناصری تفسیر می شوند که بازتاب جهان تجربه اند. نظریه نسبیت ، تفسیری منسجم از مفهوم حرکت ، زمان و مکان به ما می دهد. اینشتین برای تبیین حرکت نور از هندسه نااقلیدسی استفاده کرد. بدین منظور هندسه ریمانی را برگزید.

هندسه اقلیدسی برای دستگاهی مشتمل بر خط های راست در یک صفحه طرح ریزی شده است اما در عالم واقع یکی چنین خط های راستی وجود ندارد. اینشتین معتقد بود امور واقع هندسه ریمانی را اقتضا کرده اند. نور بر اثر میدان های گرانشی خمیده شده و به صورت منحنی درمی آید عینی سیر نور مستقیم نیست بلکه به صورت منحنی ها و دوایر عظیمی است که سطح کرات آنها را پدید آورده اند. نور به سبب میدانهای گرانشی که بر اثر اجرام آسمانی پدید می آید خط سیر منحنی دارد. براساس نسبیت عام نور در راستای کوتاه ترین خطوط بین نقاط حرکت می کند اما گاهی این خطوط منحنی هستند چون حضور ماده موجب انحنا در مکان ـ زمان میشود(سایت بینگ بنگ، مقاله هندسه نااقلیدسی و نسبیت عام انیشتین)

[13] نسبیت عام انیشتینی توجیهی را برای گرانش ارائه داد که دیدگاه نیوتونی قادر به توضیح آن نبود. این نظریه همچنین مکانیزمی را پیشنهاد کرد که با استفاده از آن میتوان زمین خوردن اجسام در نتیجه نیروی گرانشی ای چرخش زمین به دور خورشید را توجیه کرد. نسبیت عام در ابتداییترین تاثیرش، دیدگاه نیوتونی در مورد گرانش را به چالش میکشد. نیوتون نیروی گرانش را، نیرویی نامرئی نامید که اجسام را به سمت یکدیگر جذب میکنند. احتمالا خود نیوتن نیز با این توضیحش از گرانش قانع نشده بود.

در قرن هفدهم سوالات بنیادی نیوتن در مورد گرانش بیپاسخ ماند؛ اما روابط استخراج شده توسط او امروزه نیز مورد استفاده قرار میگیرد. در حقیقت استفاده از این روابط بود که به انسان کمک کرد تا به ماه برود. همچنین با استفاده از این روابط میتوان مسیر حرکت اکثر ستارهها و سیارهها را مشخص کرد. به منظور درک نسبیت عام، در ابتدا باید توضیح نیوتن از گرانش را درک کنید.

در حالت کلی دیدگاه نیوتنی در مورد گرانش، به منظور پاسخ به دو سوال اساسی به وجود آمد. سوال اول این بود که چرا جرمهای متفاوت با سرعتی برابر و در مدت زمانی یکسان سقوط میکنند. در حقیقت همانطور که در انیمیشن فوق نیز نشان داده شده، سرعت لحظه برخورد و مدت زمان سقوط یک سیب و پر پرنده با هم برابر است. به واژه «سقوط» توجه داشته باشید، چراکه مفهوم آن با واژه پرتاب متفاوت است.

در حقیقت پرتاب کردن یک جسم به آن انرژی اضافه میدهد؛ این در حالی است که با سقوط کردن یک جسم، انرژی کلی آن ثابت میماند. برای نمونه اگر مقاومت هوا را حذف کنید مدت زمان سقوط یک چکش با برگ درخت یکسان است.

سوال دومی که نظریه گرانشی نیوتن به دنبال یافتن پاسخ آن بود، دلیل چرخش ماه به دور زمین و گردش زمین به دور خورشید بود. نهایتا پاسخ نیوتن به سوال این بود که اندازه نیروی گرانش بین دو جرم، وابسته به اندازه جرم آنها است. او بیان کرد که هرچه اندازه جرم دو ذره بیشتر

باشد، نیروی کشش بین آن‌ها نیز بیشتر است.

ولی همانطور که در مطلب نیروی گرانش نیز توضیح دادیم، اندازه نیروی بین دو جرم به فاصله آن‌ها نیز وابسته است. در حقیقت نیروی گرانش از دیدگاه نیوتنی، کنشی است که در فاصله‌ای مشخص رخ می‌دهد. در نتیجه مشکل اینجا است که بستری به‌منظور انتقال این نیرو وجود ندارد. همچنین این دیدگاه محدودیت سرعت در عالم را نقض می‌کند. بیشترین سرعت ممکن در عالم، سرعت نور است. به طور دقیق‌تر هر رخدادی در طبیعت در سریع‌ترین حالت ممکن، با سرعت نور اتفاق می‌افتد. اما طبق نظریه نیوتن اگر خورشید را در یک لحظه حذف کنیم، نیروی وارد شده از طرف آن به زمین نیز به طور ناگهانی حذف می‌شود.

به منظور حل مسئله گرانش، انیشتین در ابتدا نسبیت خاص را ارائه کرد. این نظریه اجسامی را توصیف می‌کند که با سرعت ثابت و در خط راست حرکت می‌کنند. بدیهی است که این نظریه نمی‌تواند توصیف کننده اجسام شتابدار باشد. از این رو تصمیم گرفت تا نظریه‌ای جامع‌تر را در مورد حرکت اجسام شتابدار ارائه دهد. اینجا بود که عبارت نسبیت عام زاده شد.

در اوایل قرن بیستم، انیشتین آزمایشی ذهنی را انجام داد. او در حالی از طبقه دوم اتاق خانه‌اش در سوئیس به بیرون نگاه می‌کرد، به این فکر کرد که شخصی که روی بام خانه روبرو قرار گرفته، ناگهان سقوط کند. شخص سقوط‌کننده احساس بی‌وزنی خواهد کرد. این نتیجه‌ای بود که انیشتین از این آزمایش ذهنی گرفت. اما اگر شخص سقوط‌کننده درون آسانسور باشد، چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟ در این حالت سرعت سقوط آسانسور و شخص یکسان است، بنابراین از این آزمایش ذهنی نیز می توان نتیجه گرفت که شخص احساس بی‌وزنی خواهد داشت.

انیشتین از این آزمایش ذهنی نتیجه گرفت که بر خلاف نظریه نیوتن، در حالتی که شخص درون آسانسور، به همراه آسانسور سقوط کند، عملا احساس بی‌وزنی کرده و نیروی گرانشی به آن وارد نمی‌شود. در حقیقت در این حالت فضای اطراف هر دو جسم، خمیده بوده و جسم و آسانسور را به سمت زمین هُل می‌دهد. توجه داشته باشید که ما از کلمه هل به جای کلمه کشیدن استفاده کردیم.

خمیده بودن فضا به معنای آن است که فضا، بستری انعطاف‌پذیر است. نهایتا او فضای سه‌بعدی را با زمان یکی کرده و مفهومی انعطاف‌پذیر تحت عنوان فضا-زمان را بوجود آورد.

طبیعت هر جسم یا ذره‌ای این است که ساده‌ترین مسیر را در فضا-زمان به منظور حرکت انتخاب می‌کند. در نتیجه اجسامی که در فضایی خمیده قرار می‌گیرند به سمت جسمی حرکت می‌کنند که فضای مذکور را خمیده کرده‌اند. این فضای خمیده شده اثری را ایجاد می‌کند که ما آن را گرانش می‌نامیم. برای نمونه زمین، فضا-زمان اطرافش را خمیده کرده، به همین دلیل به ما نیروی گرانش وارد می‌کند.(سایت فردرس، مقاله نسبیت عام به زبان ساده)

[14] ریمان برای تکمیل Habilitation خود مجبور بود که سخنرانی ارائه کند. او سه س خنرانی، دو سخنرانی در مورد الکتریسیته و یکی در مورد هندسه مهیا کرد. گاوس مجبور بود که یکی از آن سه را برای ارائه دادن ریمان انتخاب کند و گاوس برخلاف انتظار ریمان، سخنرانی در مورد هندسه انتخاب کرد. این سخنرانی ریمان (که در مورد نظریه‌هایی که بر اساس هندسه بنا شده بود) که در دهم ژوئن 1854 ایراد شد، به شاهکار ریاضیات مبدل شد.

سخنرانی ریمان دو بخش داشت.در بخش اول، اینکه چگونه فضای n- بعدی را تعریف کنیم را مطرح می‌کند و آنرا با تعریفی از آنچه ما فضای ریمان می‌نامیم، خاتمه می‌دهد. فرُویدنتال (Freudenthal)

می‌نویسد:

«فضای ریمان کوتاه‌ترین خطوط را که امروزه ژئودزیک‌ها (geodesic) نامیده می‌شوند، دارا‌ست که شبیه خطوط راست معمولی هستند. در حقیقت در نخستین تقریب در یک دستگاه مختصات ژئودزیکی، چنانچه متریک، اقلیدسی باشد همانند یک منحنی سطح، در بالاترین مرتبهٔ جملات خود شبیه صفحهٔ مماس خود دیده می‌شود. زندگی‌کردن در سطح، امکان پی‌بردن به انحنای جهان را مطرح می‌کند و آن را در هر نقطه به عنوان ناقض قضیهٔ فیثاغورس، محاسبه می‌کند»

در حقیقت نکتهٔ مهم این بخش از سخنرانی ریمان، تعریف تانسور انحنا (curvature tensor) بود. ریمان در قسمت دوم سخنرانی‌اش سؤال عمیقی در رابطه با هندسه در جهانی که در آن زندگی می‌کنیم، مطرح می‌سازد. او می‌پرسد که ابعاد فضای واقعی چیست و فضای واقعی را چه هندسه‌ای توصیف می‌کند. این سخنرانی بسیار فراتر از مسائل روزگارش بود تا توسط دانشمندان آن زمان قدردانی شود. مونستر‌سکی (Monastyrsky) دراین باره می‌نویسد:

«در میان حضار، تنها گاوس بود که می‌توانست عمق افکار ریمان را تحسین کند.»

این سخنرانی همهٔ انتظارات او را برآورده و او را به شدت شگفت‌زده کرد. با برگشت به دانشکده، او با نهایت تحسین و اشتیاقی ندار با ویلهلم وبر (Wilhelm Weber) در مورد عمق افکاری که ریمان ارائه کرده بود صحبت می‌کرد.

آن موضوع تا شصت سال بعد از آن به‌طور کامل فهمیده نشد. فرودنتال می‌نویسد:

«نظریهٔ نسبیت عام به طور عالی کارش را توجیه کرد. با پیشرفت ریاضی و با توجه به گفته‌های ریمان، اینیشتین (Einstein) ساختاری مناسب برای نظریات فیزیکی‌اش پیدا کرد، کیهان شناسی او و فرضیهٔ پیدایش جهان و جانمایهٔ گفته‌های ریمان چیزی بود که فیزیک به آن نیاز داشت، ساختاری متریکی که داده‌ها مشخص می‌کنند.» (سایت ویکی پدیا)