فصل دوم: عدد پی: بی نهایت ِدر مشت

ما یک نسبت به معنای مطلق رابطه داریم،یک نسبت و رابطه داریم که فوق و ورای مقولات است؛

- انواع نسبت
- عدد پی: نسبت محیط دایره به قطر
- روش تحصیل عدد پی
- کاربرد معارفی عدد پی
- بی نهایت؛ قابل ارائه به بچه دبستانی

انواع نسبت

ما یک نسبت به معنای مطلق رابطه داریم،یک نسبت و رابطه داریم که فوق و ورای مقولات است؛

۱. نسبت عام‌ّنفس الامری

«مطلق رابطه». رابطه نفس الامری بین هر چیز و هر چیز می آید. بین کم و کیف می آید .بین جوهر و عرض می آید.این را هم ما اسمش را می گذاریم «نسبت و رابطه به معنای عام نفس الامری». خودش از لحاظ تحلیل مباحث بسیاری ظریفی دارد و یکی از براهینی هم که در آن مقاله عرض کردم

[1] برهان فرارابطه است. آنجا که عرض کردم «فرارابطه»، یعنی این رابطه؛ رابطه عام نفس الامری که ورای مقولات عشر است. اجناس عالیه بینشان می تواند رابطه می تواند برقرار باشد.رابطه نفس الامری که ما به الاشتراک ذاتی، دو تا جنس الاجناس ندارند.مثلا کم با کیف هردو جنس الاجناسند ما به الاشتراک در جنس ندارند.ما به الاشتراک ذاتی ندارند اما یک نحو اشتراکاتی نفس الامری ورای مقوله و ماهیت دارند. علی ای حال می بینیم یک نحو اشتراک دارند.هر دو در وصف امکان اشتراک دارند.ممکن الوجودند.کم ممکن الوجود است کیف هم ممکن الوجود است.در این وصف اشتراک دارند.بگویید امکان که جنس و ذاتی نیست، نباشد سلّمنا؛ ولی خالصه یک رابطه اشتراکی بینشان هست.این رابطه به معنای عام را کنار بگذارید.

۲.نسبت مقولی

یک نسبت دیگر داریم که نسبت مقولی است. یعنی در مقولات عشر هفت تا عرض داریم که به آن ها می گوییم: «اعراض نسبیه و مقولات نسبیه» این جا هم نسبت به کار می بریم. این نسبت دیگر در کم و کیف و جوهر نیست. فقط در هفت تا عرض است. این هفت تا مقوله نسبی در بادیه و ناهیه و جوهر الانضدی و... بحثش شده است.آن هم باز مقصود ما نیست. اصلا بیرون از کم است.هفت تا مقوله نسبی بیرون از کم است.آن را هم بگذاریدش کنار.

۳. نسبت در ریاضیات

بیایید وارد شوید درخصوص مقوله کم. وقتی وارد مقوله کم می شوید حالا در دل مقوله کم یک نسبت داریم.یعنی در علم ریاضیات یک نسبت داریم خاص‌ّخود کم. نسبتی که بین مقادیر مطرح است؛ نه نسبت بین دو تا جوهر ای نسبت بین زمان و مکان و جِده و این ها. نه درست در مقوله کم، این نسبت مطرح است. سرو کار ما الان با این نسبت است. همان نسبتی که گفتم او را عمل تقسیمی آورده است.عمل، خیلی نقش دارد.عمل تقسیمی، بازگشت ضرب است. این عمل تقسیمی باعث شده که در فضای مقادیر فقط نسبت مطرح شود. پس شما هر وقت در ریاضیات می گویید: «نسبت این مقدار با آن مقدار» اصال‌ًهنتان نباید برود به نسبت مقولات نسبیه ای نسبتی که به معنای رابطه نفس الامری عمومی است، خصوصا در علم مقدار.

بازگشت عمل ضرب

خب این نسبتی که در عالم مقدار است یعنی چه؟یعنی بازگشت عمل ضرب.اگر یک مقداری در مقدار دیگر ضرب شود نسبت حاصل ضرب به یکی از این دو تا عامل های ضرب، می شود تقسیم. اسم این تقسیم را ما می گذاریم «نسبت». و لذا اگر می گویید نسبت شش به دو می گویید چند می شود؟ می شود سه.یعنی خارج قسمت، ضرب در مخرج مساوی با صورت.(خارج قسمت×مخرج=صورت)سه دو تا شش تا.صورت همیشه دارد تقسیم می شود مقسوم است. مخرج، مقسوم علیه است.کسر شش دو تا مساوی سه، آن سه خارج قسمت است که عمل ضرب را برعکسش کرده ایم این خیلی روشن است.

این عمل تقسیم آمده پیدا شد در مقداری که منفصل که عدد است و مقداری که متصل قار که هندسه است.حالا این بحران و این ها از کجا آمد؟

علی ای حال فضای ریاضیات وقتی دست به دست هم داد و این نسبت به عنوان یک عنصر ریاضی بسیار پرکاربرد و تناسب-گریزی بزنم.ببخشید، 5 6 تا فصل است خلاصه الحساب 6 تا است؟ یادم نیست.یکی از فصل های خوبش، الاربعه المتناسبه است.الاربعه المتناسبه، تناسبی است که خودمان می گوییم.همه با آن انس دارند در کتاب ها.a به b مساوی با c به d
ای a به b مساوی با b به c که این را می گوییم میانگین هندسی.

میانگین هندسی؛میانگین حسابی

میانگین ها بحث های خیلی خوبی دارد.میانگین حسابی همان معدل گیری است که می گویند معدلت چه قدر شد.چند تا عنصر را با هم جمع می کنیم به تعداد آن ها تقسیم می کنیم بر تعدادش.اما میانگین هندسی مربعی است که واسطه بین این هاست.نسبت a به b برابر است با نسبت b به c.یعنی a به c، آ ضرب در c مساوی با b ضرب درb

b (a*c=b*b)ب به توان دو که می شود مربع.این مربع b،b به توان دو را می گویند واسطه هندسی.چون ضربش هم به توان دوست.خلاصه واسطه ها انواع میانگین از بحث های خوب ریاضی است.در چنین فضایی حال تناسب مطرح شده بود. الاربعه المتناسبه در خلاصه الحساب.

حالا بحران از کجا پیش آمد؟برای این که ببینید بحران از کجا پیش آمد من یک مقدمه عرض می کنم.ببینید شما مثال یک ستونی دارید در ساختمان.یک خودکاری هم دارید کنار دستتان گذاشته.اگر بگوییم که این ستون را مثال به هفت قسمت مساوی تقسیم کنید بلند می شوید با فرض خودمان به هر وسیله ای به هفت قسمت مساوی این ستون را تقسیم می کنید.بعد می گوییم خودکار هم دستتان است این را هم به سه قسمت مساوی تقسیم کنید.خودکار تقسیم شد به سه قسمت مساوی آن هم آن ستون بلند به هفت قسمت مساوی تقسیم شد.حالا بگویید خب آن هفت این هم سه پس نسبت ستون به خودکاری که دست شماست هفت است به سه.درست حرف زدیم؟آن را تقسیم کردیم به هفت قسمت مساوی این را هم تقسیم کردیم به سه قسمت مساوی.پس نسبت هفت است به سه.درست گفتیم؟
شاگرد:نه

استاد:چرا نه؟
شاگرد:چون قسمت هایش فرق می کند.
استاد:چیزی را که تقسیم می کنند واحدهایش باید برابر باشند.عادّ مشترک داشته باشند.بله اگر بیایید خود این خودکار را شروع کنید روی ستون بغلطانید ببینید چند خودکار است؟ بعد می گویید من این خودکار را که روی ستون بردم دیدم تعداد دفعاتش مثلا شد 15تا حالا خوب شد.می گویید نسبت ستون به خودکار نسبت ۱۵ است به یک.اینجا نسبت ۱۵ است به یک. آنجا اشتباه کردید که گفتید نسبت هفت است به سه.چون هفت و سه آن واحد در سه خودکار واحدهایی است که آن را تقسیم کردیم.واحدهای در تقسیم ستون به هفت واحدهای مختلف است با این.غلط است که این دو تا را با هم بسنجیم.وقتی می توانید بگویید نسبت که یک عادّی هر دو را بشمارد.و لذا وقتی خودکار ستون را شمرد، پانزده تا حالا خوب است می گویید نسبت ستون به خودکار نسبت ۱۵ است به یک.نسبت خودکار به ستون نسبت یک است به۱۵.
حالا آمدم و خودکار را گرداندید و رفتید شد ۱۵.۵ .یعنی یک خرده ستون بلندتر است از ۱۵ تا ولی شانزده هم نیستایین جا باید چه کار کنیم؟الان راه چیست؟می خواهیم نسبت برقرار کنیم.نسبت این ستون با خودکار چند است؟15 که نشد چون بیشتر دارد.۱۶ هم نشد چون باز ستون کم می آوریم.این جا مجبور هستیم واحد عادّ را کوچکش کنیم.مثلااگر 15.5 است از این خودکار واحد را ۳۰ می‌گیریم.نصف خودکار را می گیریم واحد.حالا می گوییم کل این ستون ۳۰.
شاگرد: ۳۱
استاد نه کل ستون
شاگرد: پانزده و نیم بوده می شود ۳۱
شاگرد ۲: می شود ۳۰ و نیم.۱۵ تا می شود سی تا نیم یک نیم درست است؟یک دانه نیم هم بود می شود سی و نیم بله درست است.۳۱
استاد:الان می خواهم بگویم آن 15 تایی که اول بود الان شد سی تا.یعنی نصف واکاره شد.حالا با نصف خودکار می رویم جلو وقتی رسیدیم به 15 چند تا نیم دارید؟سی تا آن باقی مانده اش هم نیم است می شود یک.می شود سی و یک.بعد می گوییم نسبت ستون به خودکار سی و یک به دو.دو چون الان خودکار را دوتایش کرده ایم.حالا آمده ایم و به جای این که آخر کار رسیدیم خودکار نصفش باشد ثلثش بود.یعنی 15 تا که بود،خب اینجا مجبوریم مخرج را وسیع تر بگیریم.عادّ را کوچک می کنیم.حالا آمدیم باز کمتر شد این واسطه،خلاصه می رویم در دل اعداد تا برسیم به یک واحد خیلی کوچکی که می گوییم مثلاً این چند میلیون-از میلی متر هم بروید جلوتر-یک صدم میلی متر عادّ واحد شد.عادّ واحدی که این ها را می شمارد.پس ستون نسبتش به این، فقط خودکار و عددش رفته بالا.همان طوری که آن جا یک شد دو می گوییم مثلا نسبت ستون به این خودکار نسبت 50 میلیون است به مثلا هزار.چون عادّ ام کوچک شد ولی علی ای حال نسبت برقرار است.

نسبت متجانس ِمتباین

خب این که الان ذهن شریفتان آماده شده من این مقدمه را به آن ضمیمه کنم.در عالم مقادیری که می خواهیم تقسیم کنیم اگر دو تا مقدار نامتجانس باشد نسبت برقرار نمی شود مثل ساری موارد.شما بین شیرینی با سایه نمی تواند نسبت برقرار کند.متجانس نیستند. نسبت شیرینی به سایه چیست؟نسبتی ندارند غیر از آن نسبت عامی که الان تقسیم بندی کردیم.نسبتی ندارند چون متجانس نیستند در این فضای ما.بله می تواند بالعرض نسبت برقرار کند.بگویید مثال سایه چند درجه دارد شیرینی هم چند درجه دارد.این سایه‌اش بیست درجه است آن ده درجه است.می گوییم نسبت بیست است به ده.این دو عدد را بالعرض مشترک فرض گرفتید بین دو چیزی که با هم تشارک ندارند.علی ای حال طرفین نسبت باید با هم متجانس باشند تا بتواند بین این دو تا نسبت برقرار کند.پس بین خط با سطح بین سطح با جسم تعلیمی با حجم نسبت برقرار نمی شود.همیشه بین دو تا خط نسبت برقرار می شود بین دو تا سطح نسبت برقرار می شود.نمی شود بگویند نسبت این خط به آن سطح چیست؟نسبتی ندارند.چون متجانس نیستند.این هم یک نکته خوب.

خب الان می آییم این جا ستونی که طول بود به عنوان یک خط با خودکاری که باز به عنوان یک خط طول بود متجانسند ای متجانس نیستند؟متجانسند لذا به راحتی بین‌شان نسبت برقرار کردیم با عاد مشترک.اما اگر نامتجانس باشند این عادی را 5 که الان دنبالش هستیم ندارد.شما می گویید این خط چندتاست؟می گویید مثلا 7سانتی متر.آن مربع چند تاست؟می گویید مثل سانتی متر مربع.واحد این، مربع است واحد آن، طول است.عاد مشترک ندارند که بخواهد آن تقسیم بر این شود.در چنین فضایی دو تا خط عاد مشترک دارند.از عجایب کاری که اینجا کشف شد و بحران اول را طرح داد این بود.ارتکازا همه ریاضیدان ها می گفتند خلاصه وقتی ما دو تا خط مستقیم داریم نسبت بین خط کوچک تر و بزرگ تر و بزرگ تر برقرار می شود.به چه معنا؟یعنی خلاصه می رویم تا به یک عاد کوچک بسیار ریز می رسیم که بزرگ تری را مثلا نود تا بار می شمرد کوچک تری را هزاران بار.باورشان نمی شد که ما دو تا خط مستقیم داشته باشیم پاره خط.این دو تا متجانسند چون هردو می توانیم اما متباینند.

فروریختن دستگاه تناسب با کشف مقادیر متجانس ولی غیرمتشارک

متشارک، متباین؛متشارک یعنی عاد برایشان پیدا می شود ولو خیلی ریز.اما این ها رسیدند در پیشرفت ریاضی به دو تا خط که تا بی نهایت بروید جلو به یک جزء بسیار ریزی که حتی در بی نهایت عادِّه دو باشد و عدد صحیح، پیدا نخواهد شد.این

واویلا بود.این معنایش چه بود؟معنایش این بود که نمی توانستید بگویید نسبت او به او.چون این نسبت الان وقتی شما واحد را خودکار را می گرفتید می شمردید 15.5می شد مجبور بودید چه بگویید؟بگویید نسبت ستون به خودکار 15 به یک است ؟نه.15و خرده ای به یک است.ات یک عاد مشترک پیدا نمی کردید دقیقا نمی توانستید بگویید نسبت.نسبت خرده ای.رد ریاضیات که خرده ای نیست.ریاضیات باید جواب روشنی به شما بدهد که مطلوب معلوم شود.درست شد؟فشک مقادیر متجانس اما غیرمتشارک.یعنی عاد مشترک ولو تا بی نهایت جلو بروید برای او پیدا نشود.این همه دم و دستگاه نسبت تناسب را به هم ریخت.

شاگرد: پس الان دو تا خطی که داریم اگر بی نهایت باشند حتما عاد مشترک دارند
استاد: نه پاره خطِّ محدود
شاگرد:حتی پاره خط محدود؟
استاد:بله اصلا فرض ما سر محدود است.بی نهایت را ول کنید در این فضا.اصلا اعجوبه کار همین است.خب حال الا یک مثالی می توانید برای ما بزنید؟بله قاعده فیثاغورث برایشان معلوم بود.مجموع مربع دو تا ضلع برابر است با مساحت مربع وتر.حال الا یک مربع رسم کنید قطر را شرطش بکشید.مربع یک ضلع اگر ضرب بگیریم یک واحد است.این یک واحد مربعش هم می شود یک در یک مساحتش می شود یک.آن ضلع مجاور آن هم یک.چون مساویند.مربع است دیگر.آن ضلع مجاور هم مربعش یک در یک، یک.پس دو تا مساحت دارد هر دو یک متر مربع.فرض کنید یک متر مثلا.قاعده می گوید پس مربع قطر مربع وتر این مثلث قائم الزاویه برابر است با مجموع مساحت دو تا مربع.این دو تا مربع مجموعش چند می شود؟
یک ،یک می شود دو.پس مربع وتر ما مساحتش می شود دو.

مربعی که رسم می کنند در هندسه.شکل عروس مفصل،جلوی چشم همه است.این کتاب های ریاضی اگر یادتان باشد این کتاب های ریاضی تا چند سال پیش اگر یادتان باشد یک عکس حلزونی پشتش بود.این عکس را برداشتند حیف شده است عکس خیلی خوبی بود.از همین شروع می کردند.یک مثلثی بود با دو ضلع برابر قائم الزاویه.وتر را شروع دوباره یک مثلث درونش رسم می کردند.با ضلع واحد یکی.اما با ضلع قاعده همان وتر یعنی وتر قبلی می شد قاعده او.دوباره وتر جدید را رسم می کرد، دور می زد دیده بودید.یادتان است؟اگر عکسش باشد در کتاب های ریاضی سوم راهنمایی شاید بود.مثل حلزون است که دور می زند.عکس بسیار جالبی است.یعنی شما اگر این ها را به صورت قوس بیاورید روی محور اعداد ردیف همه اعداد گنگند.اعداد گنگی که مجذور کامل نباشند.رادیکال دو رادیکال سه همین طور می رود جلو.خیلی جالب با این فرض خودش.حال الا اگر این عکس را ببینید و روی آن تامل کنید خیلی جالب است.در چنین فضایی شما الان یک قطر مربع دارید یک ضلع مربع.ریاضیدان ها رسیدند به این که بابا این ضلع مربع که چشممان دارد می بیند با این قطر مربع که این هم جلوی روی ماست در هر مربعی.دو تا خط متباینند.

متباین یعنی چه؟متباین یعنی اگر می خواهید بگویید نسبت قطر به ضلع باید عاد مشترک داشته باشند.تا بی نهایت اگر بروید به یک خط بسیار ریزی نمی توانید برسید که بگویید مثلا قطر اين میلیارد بار است ضلع هم اين میلیون بار

است.کوچک تر است از او دیگرزایی بود که خیلی کشف عظیمی بود و بحران درست کرد چه بحرانی!تاسف بار به همه ریخت.دم و دستگاه تقسیم تمام شد دیگر.تقسیم 2 می گفتند وتر قطر مربع نسبتش به ضلع چند است؟همین الان ام که می گویی ۱/۴۱۴ بود دیگر.جذر 2 می شود عددی اعشاری ات بی نهایت.یعنی نمی رسی جذرش را بگیر.جذر 2 عددی است که مجذورش می شود ۲ نه کمتر نه بیشتر.اگر بگویی تقریباً تقریبا همه که تقسیم نشد.نسبت نشد.به صفر دادیم باید بگویی تقریبا.

اذل آمدن ریاضیدان ها الان این کار را می کنند عدد را می گویند با یک نمادش می گویند جذر دو ببینید خود دو را می آورند آنی که اگر ضرب در خودش بکنیم به توان دو برسانیم خودش ضرب در خودش می شود دو.چون مربعش را بگیرم.مربعش موجود است جلوی چشم است.ضلعش هم موجود است جلوی چشم.این را دارم.آقای آدرس هم نمی توانیم بکنیم در هندسه.چه عددی است؟عدد نداریم.کاری همه.عدد مقدس است که همه عالم را ساخته است؟قطر مربع جلوی چشم ما هیچ عددی نمی تواند نشان بدهد ولو تا بی نهایت برویم.عددی نداریم.فقط باید بگویی جذر دو.یعنی همانی که چیست؟می گویی این که مبهم و مجهول است.نیست اصلا.می گویی من این که دارید می بینید.خطش را دارید می بینید.مربعی هم که تشکیل داده است دارید می بینید.اما قطر مربع را این وتر مثلث قائم الزاویه با دو ضلع واحد را نمی تواند بگویی چند است؟ چه عددی است؟هیچ عددگویا ندارد.حتی نسبت بین دو تا عدد نمی تواند باشد.

شاگرد:در برهانش هم نیست که نمی توانیم ببینیم.محال است.
استاد:برهان های متعددی دارد.اگر در اینترنت ببینید برهان گنگ بودن جذر دو، رادیکال دو، ریشه دو
شاگرد:مفادش این است که ما نمی توانیم برسیم؟چون مثلا بی نهایت است یا خودش محال است؟
استاد:نه اصلا محال است برهانش را ببینید.می گویند خلاصه باید یک جایی باید برسد که به صورت a b نشانش بدهیم.می گویند لازمه این که بخواهد جذر او باشد این است که a حتما زوج باشد b هم حتما زوج باشد و این خلف فرض است.از طریق برهان خلف می گویند اصلا محال است رادیکال 2 را به صورت نسبت دو عدد a,b نشانش بدهید.خلاصه a b یا زوج است یا فرد. از این که بیرون نیست.لازمه اش این است با برهانی که می گویند هردویش زوج باشد و وقتی هر دویش زوج بود کسر ساده ای که ساده ترین کسر باشد نیست.چند تا برهان برایش می آورند.عرض کنم که این ها سابقه هزار سال چه فکرهایی روی این ها شده.

حالا این بحران اول آن زمان خیلی مهم بود.الانش هم برای ما مهم است.یعنی خلاف یک نحو شهود ذهنی ساده است:خلاصه یک جایی می رسیم که خیلی خیلی ریز این ها را می شمردم.می گویند نه شما تا بی نهایت هم بروید به یک عدد مشترک ریز نخواهید رسید.مرحوم خواجه ریاضیدان بسیار قوی بودند غیر از این که فیلسوف و متکلمند.ریاضیدان بسیار قوی
اما دیگرانی داریم که فیلسوف بزرگی هستند اما ریاضیدان و هندسه دان نبودند سریع این ها را خوانده اند.من این ها را داداشت دارم کتاب هایی که امال بزرگان حکمت

است.اما دقیقا فرق تشارک و تباین را با تجانس نگذاشته‌اند الان با این بیانی که من عرض کردم در ذهن شما جا گرفت که دقیقا متباین یعنی متجانسند ولی متباین.حتما دو تا خط مستقیمند.نمی‌خواهم مثلا نسبت برقرار کنیم بین یک خط مستقیم با یک خط منحنی که آن جا بگویی بابا هر چه زیر بشوی خط منحنی آخرش شوق است.خط مستویعا دار زیرش آخرش نمی شود.خب این یک اشکال است به این که اساسا خط مستقیم با خط منحنی تجانس ندارند.اما وقتی متجانس بودند قطعا مثلا دو تا خط مستقیم روی صفحه.این جا دیگر یعنی چه که متباینند؟

متباین یعنی قطر مربع را بگذارید کنارش هم بگذارید ضلعش را،حالا جدا کنید.قطر نشور زاحا نقطه هم دو تا هم مربع ضلع،مربع قطر مربع.دارد روشن زاحا نقطه دو مربع خط یک شما است محال یعنی.متباینند خط تا دو این میگوییم.هم کنار بگذارید.دارد بسیار ریز تا بی نهایت پیدا کنید که عاد مشترک هر دو باشد.

خب حالا برگردیم.ستون اما وتر مثلث است،ستون اما قطر مربع است.این که می خواهیم کنارش بگذاریم ضلع مربع است.آیا شما می توانید با خودکاری با نصف خودکاری با یک دهم خودکاری با یک میلیونیم خودکار بیایید بگویید نسبت این ستونی که قطر مربع است به این ستون پایینی که مثلا ضلع مربع است چند است؟نه دیگر تمام شد.دیگر نمی توانید نسبت بدهید
این جا بود که تناسب و نسبت و تقسیم و همه این ها به هم ریخت.تقسیم قابل نیست.یک چیزی ته می ماند.در جذرگیری هم این را هم شکل اشیاء را کشیده ام دارم.محاسبه را جذرگیری.رسیدم.بله.نه ای میرسیدم جذر عمل دانم نمی الحساب خلاصه شیء کردیم فایل اشیاء هست.این که چه طور الان دو رقم اعشاری تا جذر می گیرید ته چیزی می ماند ترسیم کنید عمل جذرگیری را خیلی روشن است.تا بی نهایت هم عدد گنگ است نمی رسید به این که این مربع تمام شود.

الان امروزه برای همه روشن است.شما می گویید ۵ ۵ تا ۲۵ تا.مربع ۲۵ خوب.سه تا می ماند یعنی هر عددی که جذرش کامل نیست.عدد صحیح در برش خودش تا بی نهایت می ماند.جذر کامل است.الان ۲۴ چه عددی در برش خودش شده شده بیست و سه و چهار؟عددی چه جذر کامل است.الان ۲۴ چه عددی در برش خودش شده است اما ۲۴ ندارد.گر ۲۴ را جذرش بگیرید تا بی نهایت می ماند در عمل جذرگیری شما.یعنی دلتان دیگر جمع باشد که یک خط پاره یعنی فی عدد.است همین فی عدد.نیست او با این بین کرتشم عاد و گرزب صحیح آن در کند می برقرار که نسبتی تا دو نقطه این که هست آن در نقطه است گنگ نقطه این.طلایی نسبت در دید می آید پدید ها این و مساحت و مربع تا سه با یعنی خط را به دو تا قسمتی که عاد مشترک ندارند تقسیم می کند.این را می گوییم نقطه طلایی.

شاگرد:در سطح ها این و همه می شود.
استاد:مربوط به سطح است ولی اما ابتدا روی نقطه تعیین می کنیم هر پاره خطی.نقطه واحد هم هست ولی از هر دو طرف می شود.از این طرف خط فرط شتسار

نقطه طلایی داریم طرف چپش هم نقطه طلایی داریم.تا از کدام طرف مستطیل را بنا کنیم.یعنی این نقطه را شما با رسم دقیق با برهان هندسی تعیین می کنید ولی بعد از این که تعیین کردید این نقطه دارد می گوید.بابا پاره خط دست راست من با پاره خط دست چپ من عاد مشترک ندارند.به راحتی.مثل این که در مربع شما می گفتید ضلع او می گوید من با قطر خودم عاد مشترک ندارم.

این عجایب به پا کرد در عالم حساب.عرض کردم اصلا نسبت ها فرو ریخت.ریاضیدان نمی تواند بگوید نسبت قطر به ضلع.الان نسبت های مثلثاتی امروز ما همه داریه مثلثاتی در مدرسه ها بود.نسبت های مثلثاتی: تانژانت و سینوس و سکانت.که متمم آن کتانتژانت و کسینوس و کسکانت.که این ها شش تا نسبت های مثلثاتی هستند در دایره مثلثاتی رسم می شوند.شما می خواهید بگویید نسبت وتر به ضلع.دارید می گویید نسبت او به او.اگر این ها عاد مشترک نداشته باشد می شه چه؟نسبت یعنی چه؟نسبت یعنی تقسیم بر او.تقسیم نمی شود.یک خرده شما نمی توانید تقسیم را انجام دهید.چون متباینند.با تباین چه طور می خواهید این را انجام دهید؟

خب در تاریخ ریاضیات ج ۲ ص ۳۱۶ به نظرم اگر خواستید بعدا مراجعه کنید.در جلد اول هم چند بار گفته.زمان فیثاغورث گذشت خیلی طول کشید.بعد او افلاطون آمد شاگردی داشت ایودوکسس این مشکل را حل کرد برای فضای ریاضیات.یعنی این فاصله که می گویند از اسرار ریاضی بود.این فاصله ریاضیدان ها می گفتند که هیچ. ما نمی توانیم بگوییم نسبت این به این.اگر متباین باشند که نسبت نیست.چه کار بکنیم؟یعنی همه چیز به هم ریخته بود.

ایودوکسس آمد نسبت را به معنای جدیدی معنا کرد.گفت این تقسیم بر او.اشاره ب خط پاره بر تقسیم الف خط پاره بگویید این که به جای او.فقط عرض می کنم.مساوی با فلان عدد گفت اگر خط کوچک را ما امضاء ضعف کنیم شما ضعف کنیم امروز مثلا الان اگر خودکار ما با ستون ما خلاصه یک وقتی از آن پاره خط بزرگ بیشتر می شود.الان اگر دو پاره خطی باشند که متباینند در واقع عندالله عاد مشترک ندارند،او این طور معنا کرد.گفت نسبت او به این یعنی چه یعنی اگر خودکار را روی این بغلطانیم یک جایی می رسد که خطی که از او غلت به او وجود می آید از آن خط بزرگ بیشتر می شود.همین.یک چیز خیلی ساده ای است اما یک بحران عظیمی را با تعریف خودش حل کرد.بعد از این که ایودوکسس بحران را حل کرد تحریر اصول اقلیدس نوشته شد.یعنی اقلیدس توانست و گرنه قبلش نمی شد اصلا به هم ریخته بود.با ارائه این تعریف و این خصوصیات،حالا مقاله پنجم و ششم اقلیدس به زیباترین وجه نوشته شد.حالا بعدا عرض می کنم اگر فرصت کردید اصول اقلیدس را سراوانی شروع را گوش بدهید بحثش بکنید خیلی کتاب عالیی است.مقاله پنجم وششم راجع به نسبت و انواعش و مباحثی که مطرح است و بعد رفته مقالات بعدی که از این ها همه استفاده کرده است.

حالا این توضیحات مفصل تری برای بحران اول.حالا دیگر الان چیزی در ذهنم نیست.این حاصلش شد.شما این تباین مقادیر را در ذهنتان پررنگ کنید.بسیاری از

جاها وقتی می رسید به عبارات حتی از بزرگان د خودتان می بینید ولی اندازه ای که راه بیفتد و مطلب شروع شود هر چه در ذهنم باشد عرض می کنم.

---

[1] اشاره به مقاله «سه برهان تنبیهی بر مبرهن البرهان»

عدد پی: نسبت محیط دایره به قطر

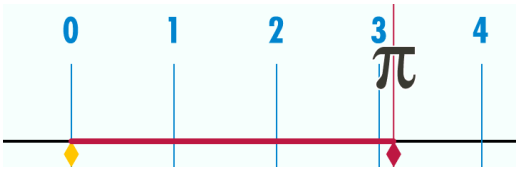
می‌خواهیم ببینیم نسبت محیط دایره به قطر چقدر است؟ یعنی اگر محیط را باز کنیم، از گردی در بیاوریم و یک خطِّ‌مستقیمش بکنیم، چند تا قطر بگذاریم سر می‌رسد؟ می گوییم سه تا قطر را که روی محیط بغلطانید، دایره می گردد[1]، دفعه بعدش دیگر نه؛ کمی از آن فقط می‌ماند. این را می‌گوییم نسبت محیط به قطر، یعنی محیط، چند برابر قطر است؛ نسبت یعنی صورت، تقسیم بر مخرج. یعنی محیطِ‌گردِ‌دایره، تقسیم بر قطر، می شود عدد پی.فعلاً می‌گوییم ۱۴/۳.

هر دایره دلخواه از –که دایره هندسی باشد- روی هر محوری رسم کنید، به محض اینکه روی محور اعداد، این دایره را باز کنید، اگر قطر این دایره،۱ باشد(«یکِ» روی‌ِمحور) یک سر محیط دایره را روی عدد صفر می‌گذارید، آن سرِ‌محیط می‌شود عدد پی[2]. یک نقطه‌ی معیّن روی محور؛سه و چهارده صدم و بروید تا بی‌نهایت...[3]

---

[1] گشتن به‌معنای دور زدن و نه به‌معنای شدن

[2]



[3] پوی‌انمایی نسبت عدد پی به دایره را در سایت ویکی پدیا مشاهده نمایید.

روش تحصیل عدد پی

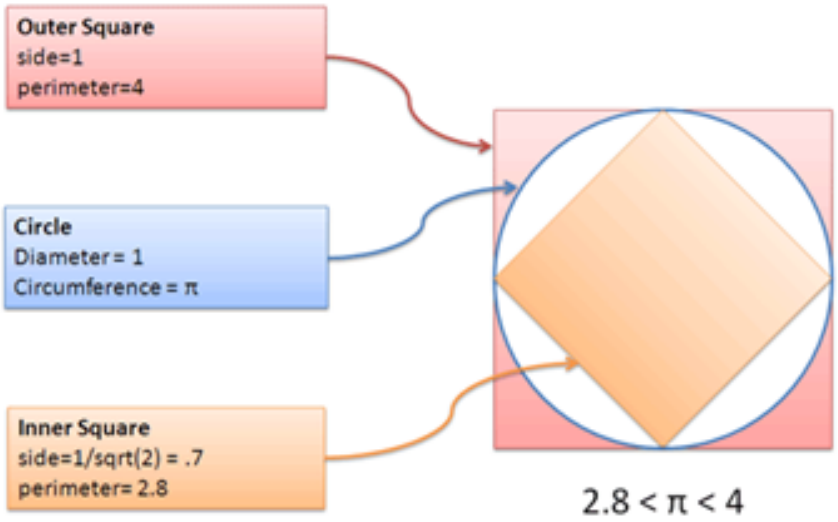
عدد پی، عددی است که روی نقطه معیّنی روی محور است، اما شما نمیتوانید نشانش بدهید. چه کار میکنید؟ از پس و پیش، به آن نزدیک میشوید. یعنی از ۳.۱۴ که مثلاً با ۹۶ ضلعی ارشمیدس بوده[1]، از نقطه ۳.۱۴ شروع میکنید، بعد از ۳.۱۴ روی محور، ۳.۱۵ است. میگویید نقطه پی که محیط دایره است، بین ۳.۱۴ و ۳.۱۵ هست. نه بیرون از ۳.۱۵ است، نه عقبتر از ۳.۱۴ است؛ بین این دو تاست. از طرفین(۳.۱۵ و ۳.۱۴)به آن نزدیکتر میشوید وتا بینهایت میروید. حدّش[2] هست. به تعبیر مسامحی میگوییم در بینهایت به پی میل میکند.

امروز دیگر اینها از واضحات است، یعنی اهل خبره دو نفرشان هم در این اختلاف ندارند، امروز برای بشر، این که عدد پی عددی است گنگ[3]، متعالی[4]و رسمیتپذیر[5]، اینها همه مبرهن شده است[6].

---

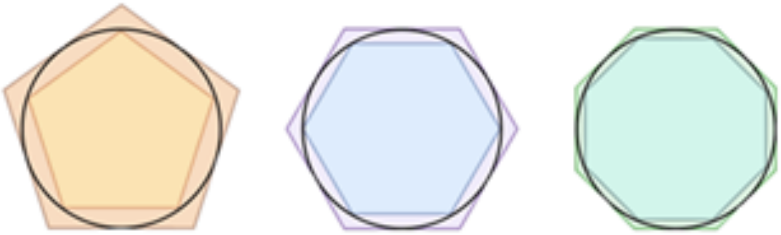
[1] ارشمیدس محیط دایره را نمیدانست؛ اما نااُمید نشد و از آنچه میدانست یعنی محیط یک مربع آغاز کرد. البته او در واقع با یک شششضلعی محاسبه خود را آغاز کرد؛ اما از آنجا که ترسیم و کار کردن با مربع آسانتر است، ما از مربع استفاده میکنیم.

ما محیط یک دایره را نمیدانیم؛ اما میتوانیم آن را بین دو مربع[محیطی و محاطی] رسم کنیم:



دقت کنید که این وضعیت شبیه مسیر مسابقهای با ایالهای داخلی و خارجی است. محیط دایره هر چه که باشد بین محیط دو مربع قرار دارد، یعنی بیشتر از محیط مربع داخلی و کمتر از محیط مربع بیرونی است.محیط مربعها را میتوانیم به سادگی محاسبه کنیم:ما نمیدانیم که پی چقدر است؛ اما میدانیم که عددی بین 2.8 و 4 است. اگر تصور کنیم دقیقاً نیمه این دو کرانه باشد، پس باید در حدود 3.4 باشد.

مربع‌ها گوشه‌دار هستند. آن‌ها را نمی‌توان چندان شبیه دایره دانست و این اختلاف موجب محاسبات نادرست و با اشتباه زیاد می‌شود؛ اما با افزایش اضلاع، برای مثال با استفاده از هشت‌ضلعی می‌توانیم حدس بهتری از عدد پی داشته باشیم.



نان که می‌بینید با افزایش تعداد اضلاع، به شکل کی دایره نزدیک‌تر می‌شویم. متأسفانه اعداد اعشاری در سال 250 قبل از میلاد هنوز اختراع نشده بودند، چه برسد به نرم‌افزارهای صفحه گسترده. بنابراین ارشمیدس مجبور بود که این فرمول‌ها را به کمک کسرها حل کند. او کار خود را با شش‌ضلعی آغاز کرد و با ۱۲، 24، 48 و 96 ضلع ادامه داد. تخمین نهایی وی از عدد پی با استفاده از شکلی با 96 ضلع به صورت زیر بود:

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$$

نقطه میانی این بازه برابر با 3.14185 است که تقریباً 99.9% دقیق است!(ساعت فردرس، مقاله عدد پی چگونه کشف شد؟)

[2] حد (به انگلیسی: Limit): وقتی که مقادیر متوالی به یک متغیر نسبت داده می‌شود، و آن متغیر بی‌نهایت به عدد ثابتی نزدیک شود، به طوری که اختلاف آن‌ها از مقدار ثابت به هر اندازه کوچک قابل انتخاب باشد، این مقدار ثابت را حد همه مقادیر متغیر می‌گویند.(ساعت ویکی پدیا)

[3] عدد غیر نسبی، گُنگ یا اصم به انگلیسی: (Irrational number) در دستگاه اعداد به‌صورت عددی حقیقی تعریف می‌شود که عدد نسبی (عدد گویا) نباشد، یعنی نتوان آن را به صورت کسری نوشت که صورت و مخرج عدد صحیح باشند.(همان)

[4] عددی که جبری نباشد، عدد متعالی یا ترافرازنده یا غیرجبری نامیده می‌شود.

نمونه‌های برجسته‌ای از اعداد ترافرازنده ? و e می‌باشند. نمونه‌های کمی از اعداد ترافرازنده شناخته شده‌اند چرا که اثبات ترافرازنده بودن یک عدد دشوار است. با این حال، شمار آن‌ها کم نیست و تقریباً همهٔ اعداد مختلط و حقیقی ترافرازنده شمرده می‌شوند.

نخستین اثبات وجود اعداد ترافرازنده (متعالی) را جوزف لیوویل، ریاضیدان فرانسوی، در سال ۱۸۴۴ داده است.

(سایت ویکی پدیا، مدخل اعداد متعالی در این صفحه همچنین طبقه بندی اعداد را می توانید مشاهده کنید.)

اعداد گنگ دو نوع دارند: اعداد جبری (algebraic numbers) و اعداد متعالی (transcendental numbers)
مجموعه اعداد گنگ (Irrational Numbers)

به یک معنا، اعداد گنگ یک نوع خیلی فراگیر می باشند، هر عددی در خط اعداد که یک عدد گویا نباشد، یک عدد گنگ است.

با این تعریف، هیچ عدد گنگی نمی تواند به صورت کسری نمایش داده شود، همچنین یک عدد گنگ نمی تواند به شکل یک عدد اعشاری مختوم (terminating decimal) یا به شکل یک عدد اعشاری متناوب (repeating decimal) نمایش داده شود. (برای اطلاعات بیشتر در مورد این انواع اعداد اعشاری، فصل 11 را ببینید).

در عوض، یک عدد گنگ می تواند تقریبی از یک عدد اعشاری نامتناهی (non-terminating)، و غیر تکرار شونده (non-repeating) باشد:

یک رشته از اعداد بعد از ممیز اعشاری که بدون ایجاد یک الگو می توانند تا ابد ادامه پیدا کنند.

مشهورترین مثال از اعداد گنگ عدد پی (?) می باشد، که نمایندهٔ محیط یک دایره با قطر 1 واحد می باشد. یک عدد گنگ رایج دیگر 2? می باشد، که نمایندهٔ طول قطر یک مربع با اندازه ضلع 1 واحد می باشد. در واقع، تمامی ریشه های توان دوم (square roots) از اعداد غیر مربع (non-square numbers) - مانند 3?، 5?، و به همین ترتیب - اعداد گنگ می باشند.

اعداد گنگ فضاهای موجود در خط اعداد حقیقی (real number line) را پر می کنند. (خط اعداد حقیقی همین خط اعدادی است که شما استفاده می کنید، اما متوالی است، هیچ جای خالی در آن وجود ندارد بنابراین هر نقطه ای بر روی آن با یک عدد جفت شده است.) اعداد گنگ در بسیاری از مواردی که در آن نیاز به سطح دقت خیلی بالایی ندارید به شکل اعداد گویا مورد استفاده قرار می گیرند، اما مقدار دقیق آن عدد نمی تواند به صورت یک کسر نمایش داده شود.

اعداد گنگ دو نوع دارند: اعداد جبری (algebraic numbers) و اعداد متعالی (transcendental numbers). در مورد این دو نوع در ادامه همین فصل توضیحاتی را خواهم داد.

مجموعه اعداد جبری (Algebraic Numbers)

برای درک اعداد جبری، نیاز به اندکی دانش در مورد معادلات چند جمله ای (polynomial equations) دارید. یک معادلهٔ چند جمله ای، یک معادلهٔ جبری است که مطابق شرایط زیر باشد:

عملیات های آن محدود به جمع، تفریق، و ضرب باشد. به عبارت دیگر، لازم نیست که بر یک متغیر تقسیم کنید.

متغیرهای آن تنها به توان اعداد مثبت که در مجموعه اعداد کامل (whole-number) باشند، رسیده است.

شما می توانید در کتاب Algebra For Dummies اطلاعات بیشتری در مورد چندجمله ای ها بدست آورید.

در اینجا چند معادله چند جمله ای می بینید:

$$2x + 14 = (x + 3)^2$$
$$2x^2 - 9x - 5 = 0$$

هر عدد جبری به عنوان راه حل حداقل یکی معادله چند جمله ای، نشان داده می شود. برای مثال، فرض کنید معادله زیر را دارید:

$$x^2 = 2$$

شما می توانید این معادله را به شکل زیر حل کنید:

$$x = \sqrt{2}$$

بنابراین 2? یک عدد جبری می باشد که مقدار تقریبی آن برابر با ...1.4142135623 است.

مجموعه اعداد متعالی (Transcendental Numbers)

یک عدد متعالی (transcendental number)، در مقایسه با یک عدد جبری، هرگز راه حل یک معادله چند جمله ای نمی باشد. مشابه اعداد گنگ، اعداد متعالی نیز یک نوع فراگیری هستند: هر عددی در خط اعداد که عددی جبری نباشد، یک عدد متعالی است.

مشهورترین عدد متعالی ? می باشد، که مقدار تقریبی آن برابر با ...3.1415926535 است. استفاده از این عدد در هندسه آغاز شد اما تقریبا ًبه تمامی نواحی ریاضی گسترش یافت.

سایر اعداد متعالی مهم در هنگام مطالعه مثلثات (trigonometry) برایتان پیش می آیند. سینوس ها (Sines) ، کسینوس ها (cosines)، تانژانت‌ها (tangents) و سایر توابع مثلثاتی معمولا ً اعداد متعالی می باشند.

یکی دیگر از اعداد متعالی مهم عدد e می باشد، که مقدار تقریبی آن ...2.7182818285 است. عدد e مبنای لگاریتم طبیعی (natural logarithm) می باشد، که احتمالا ًتا زمانی که وارد مبحث حساب دیفرانسیل و انتگرال (calculus) نشوید، از آن استفاده نخواهید کرد. مردم از e برای حل مسائل مربوط به بهره مرکب (compound interest)، رشد جمعیت (population growth)، فروپاشی رادیو اکتیو (radioactive decay)، و مواردی از این دست، استفاده می کنند.(سایت خوشآموز،مقاله ده مجموعه مهم اعداد که باید بشناسید)

[5] در جبر و هندسه، عددی حقیقی r عدد ترسیم‌پذیر (انگلیسی: Constructible number) است اگر و تنها اگر بتوان با داشتن پاره‌خط واحد، با خط‌کش و پرگار بتوان در تعداد مراحل متناهی پاره‌خطی به طول |r| رسم کرد. تمام اعداد حقیقی ترسیم‌پذیر نیستند و برای توصیف آن‌هایی که ترسیم‌پذیر هستند باید از روش‌های جبری استفاده کرد.

یک نقطه در فضای دوبعدی ترسیم‌پذیر است اگر نقطهٔ پایانی پاره‌خط واحد باشد، ای نقطه تقاطع دو خط که با نقاط ترسیم‌پذیر تعریف شده‌اند، ای تقاطع خط و دایره‌ای که مرکزش نقطه‌های تقسیم‌پذیر باشد و از یک نقطهٔ تقسیم‌پذیر بگذرد، ای تقاطع دو تا از این دایره‌ها.

به‌عبارت جبری، یک عدد ترسیم‌پذیر است اگر و تنها اگر بتوان آن را با اعمال مراحل متناهی چهار عمل اصلی و ریشه دوم (فقط ریشهٔ دوم و نه ریشه‌های بالاتر) بر اعداد ترسیم‌پذیر دیگر ساخت، و (ترسیم پذیر عدد) بنابر تعریف تفسیر پذیرند.(سایت ویکی پدیا، مدخل

عدد a را «رسم پذیر» گوییم اگر بتوان تنها با استفاده از خط کش و پرگار پاره خطی به طول a رسم کرد. و البته فرض ما بر این است که یک واحد طول داده شده باشد.از این به بعد هر جا کلمه رسم پذیری آمد منظور همان، رسم پذیری به وسیله خط کش و پرگار است.رسم پذیری بعضی عددها بسیار واضح است. مثال ۱ و ۲ و ... اما بعضی دیگر احتیاج به بررسی دارند مثل 2? . آیا این عدد رسم پذیر است؟

از دوران دبیرستان به یاد داریم که : از هر نقطه خارج یک خط مفروض می توان خطی عمود بر آن رسم کرد.اگر محل تلاقی این دو خط را مبدأ،در نظر بگیریم به این محور، محور رسم پذیر می گوییم.

در این محور:

۱(a,0)یا(0,a) را رسم پذیر گوییم اگر a رسم پذیر باشد.

۲) (a,b) را رسم پذیر گوییم اگر a و b رسم پذیر باشند.

هر شکلی را که روی این محور بتوان رسم کرد، اعم از پاره خط، دایره و... یک شکل رسم پذیر گوییم.

حال می توانیم به راحتی بگوییم که 2?رسم پذیر است. چون اگر(۰.۱)و(۰و۱) را روی محور به هم وصل کنیم بنابر قضیه فیثاغورث پاره خطی به طول 2?داریم. حال سوالی که مطرح می شود این است که آیا همه اعداد رسم پذیرند؟ و اگر نه چه عددهایی رسم پذیرند و کدام ها رسم پذیر نیستند. همه عددها رسم پذیر نیستند و تعیین رسم پذیری آنها به کارهای تخصصی میانجامد.

حال سوالی که مطرح می شود این است که آیا همه اعداد رسم پذیرند؟ و اگر نه چه عددهایی رسم پذیرند و کدام ها رسم پذیر نیستند. همه عددها رسم پذیر نیستند و تعیین رسم پذیری آنها به کارهای تخصصی می انجامد اما حال که مفهوم عدد رسم پذیر ور فهمیدیم چند حکم کلی درباره رسم پذیری ور هم بیان می کنیم:

۱) اگر a و b رسم پذیر باشند آنگاه a+b , a b , a.b , a/b نیز رسم پذیرند.

۲) اگر a رسم پذیر باشد آنگاه رادیکال a نیز رسم پذیر است.

۳) موارد زیر معادلند (یعنی اگر یکی از آنها در مورد یک عدد درست باشد دو تای دیگر نیز درستند):

الف) x رسم پذیر است.

ب) (Cos(x رسم پذیر است.

ج) (Sin(x رسم پذیر است.

۴) همه اعداد گویا (Q) رسم پذیر هستند.

اکنون کار قضاوت در مورد رسم پذیری عددها خیلی ساده تر شد. تنها عددی ممکن است رسم پذیر نباشد که گنگ باشد. اما تعیین اینکه عدد گنگی رسم پذیر است یا نه دارای تکنیکهای ویژه ایست.

(سایت آی هوش، مقاله رسم پذیر بودن یک عدد).

[6] در سال ۱۷۶۱ لامبرت ریاضیدان سوئیسی ثابت کرد که عدد پی گنگ است و نمیتوان آن را به صورت نسبت دو عدد صحیح نوشت. همچنین در سال ۱۸۸۲ فردیناند فون لیندمان ثابت کرد که عدد پی یک عدد جبری نیست و نمیتوان ریشه یک معادله جبری باشد که ضرایب آن گویا هستند. (همانند عدد (e))کشف گنگ بودن عدد پی، به سالها تلاش ریاضیدانان برای تربیع دایره پایان داد.(سایت ویکی پدیا)

کاربرد معارفی عدد پی

خوب دقت کنید. الآن عددهای بعد ۱۴ صدُم را؛مم‌یزّهای بعد مم‌یزّ را، تا چندین تریلیون حساب کردند [1]. خلاصه آخرین عددی که فعلاً بشر می‌داند، می‌دانیم یک عددی معیّن بعدش هست؛ ما نمی‌دانیم، ولی معیّن است. ما باید برویم کشفش کنیم؛ نه فرضش کنیم؛ نه خلقش کنیم .نکته اصلی این است، این نقاطی که شما بعد از مم‌یزّ می‌گذارید، نقطه‌های معیّن روی محور است؛ نقطه‌ی نامعین نیست. یعنی ۳.۱۴ که معین است، عدد بعدی مم‌یز که ۳.۱۴۱، روی محور معلوم است، ولو نزدیک‌تر به پی شده ولی خود پی نیست. عدد بعدی هم همینطور، تا بی‌نهایت می‌روید ولی به سر دایره نمی‌رسید، چون عدد گنگ است. ولی نقاطی که طی می‌کنید تا به آن نزدیک بشوید نقاط متعین است.

---

[1] باوجود آنکه همه ریاضیدانان می‌دانند که عدد پی گنگ می‌باشد و هرگز نمی‌توان آن را به‌طور دقیق محاسبه کرد اما ارائه فرمول‌ها و مدل‌های محاسبه عدد پی همواره برای آن‌ها از جذابیت زیادی برخوردار بوده‌است. بسیاری از آن‌ها تمام عمر خود را صرف محاسبه ارقام این عدد زیبا نمودند اما آن‌ها هرگز نتوانستند تا قبل از ساخت کامپیوتر این عدد را بیش از ۱۰۰۰ رقم اعشار محاسبه نمایند. امروزه مقدار عدد پی با استفاده از پیشرفته‌ترین رایانه‌ها تا میلیون‌ها رقم محاسبه شده‌است؛ و تعداد این ارقام هنوز در حال افزایش است.

اولین محاسبه کامپیوتری در سال ۱۹۴۹ انجام گرفت و این عدد را تا ۲۰۰۰ رقم محاسبه نمود و در اواخر سال ۱۹۹۹ یکی از سوپر کامپیوترهای دانشگاه توکیو این عدد را تا ۲۰۶٬۱۵۸٬۴۳۰٬۰۰۰ رقم اعشار محاسبه نمود. (سایت ویکی پدیا)

آخرین رقم اعشار محاسبه شده، به عدد ۳۱ تریلیون رسیده است.

بی نهایت؛ قابل ارائه به بچه دبستانی

این است که می‌گویم زمینه‌اش فراهم است که برای بشر نشان بدهیم. الآن شما یک دایره را باز کردید، کف دست بچه می‌گذارید. می‌گویید این سر «پی» که معلوم است، صفر هم معلوم است. وقتی می‌خواهی حساب کنی بروی برسی به سر دایره که پی است، در رسیدن به نقطه‌ی پی، بی‌نهایت نقطه‌ی متعیّن است که هر چه حساب پی را جلوتر ببری کشفش می‌کنید.دو طرف، بی‌نهایت. یعنی از دو طرف دارید به آن نقطه پی نزدیک می‌شوید تا بی‌نهایت هم در بی‌نهایت نزدیک می‌شوید، نقاطش هم متعین است، شما کشفش می‌کنید؛ ولی در عین حال هیچکدام از آن‌ها «پی» نیست!این،یک مثال ِهندسی ِساده است، هر بچه‌ای هم در دبستان خوانده است. می‌خواهیم چیزهایی را که همه بلد هستند فقط به او نشان بدهیم.

الان این مثال،مثل سنگ خاراست، فقط باید کار بشود و این مثال‌ها باز بشود،تصویری توضیح داده بشود، که همه بفهمند. وقتی اذهان مطلب را گرفتند، همینطور دست به دست می‌شود؛ به سرعت پخش می‌شود.