فصل سوم: عدد پی؛ ابزار ارائه مجرّدات

آیا وقتی شما می‌گویید یک دایره محیطش با قطرش، نسبتی دارد، واقعاً این شکل(شکل دایره که یک خط است و این نقطه مرکزش است) چه کسی است که آن را به وضوح درک نکند؟ همه می‌فهمیم شکل چیست؛ درک روشنی از آن داریم. سؤال این است:

- عدد پی؛ ابزار ارائه مجرّدات
- سؤال: عدد پی؛ نسبتِ کدام دایره؟
- سؤال: عدد پیِ کلّی؛ دارای شکل؟
- جمع بندی

عدد پی؛ ابزار ارائه مجرّدات

آیا وقتی شما می‌گویید یک دایره محیطش با قطرش، نسبتی دارد، واقعاً این شکل(شکل دایره که یک خط است و این نقطه مرکزش است) چه کسی است که آن را به وضوح درک نکند؟ همه می‌فهمیم شکل چیست؛ درک روشنی از آن داریم.

سؤال: عدد پی؛ نسبت ِکدام داریه؟

سؤال این است:

سؤال: عدد پی؛ نسبت ِ کدام داریه؟

- وقتی میگوییم نسبت ِداریه به قطر، منظور ما از این داریه، کدام داریه است؟ داریهای است که فقط در ذهن شماست ای در ذهن من است؟ داریهای که در دفتر ِشما کشیدن ای داریهای که در دفتر ِمن کشیدن؟ کدام داریه؟ همهی این ها روی هم؟

یعنی اگر هر چه داریهی کشیده هست ای ذهنهای همه بشر یکی دفعه محو بشوند، نسبت محیط داریه به قطرش تمام میشود؟ اینکه محیط داریه سه برابر قطرش است، این نسبت دیگر نیست؟ محو میشود؟ ای نه؛ ذهن و عقل ما این نسبت را درک میکند.

اگر هیچ انسانی نباشد، ولی یکی شیئ تیزی بیاید و یکی سنگی را که به صورت گردی هست ببرد، مقطع این سنگ ِگرد ِتوپمانند، داریه نیست؟ داریهی مادّی. اتصاف او به این گرد بودن به ذهن ما ربطی دارد؟

وقتی شما یکی توپ را نصف میکنید، نصف شدن توپ، بند به ذهن شما نیست. و حدوث مقطع یکی توپ به عنوان سطح ِداریه، باز به ذهن شما مربوط نیست. یعنی شما میتوانید داریهای در بطن ماده پیدا کنید.الان من چیزی را **درک** میکنم گرد است ای من به آن **میگویم** گرد است؟ اگر گفتن است ،بگویید مربع است؛ یکی اقوامی بگویند این چهارگوش است، یکی اقوامی بگویند گرد است.

مفهوم ِطول؛ چند متر؟

 شما میگویید: محیط، قطر، داریه، طول، فاصله، بُعد. وقتی طول میگویید، همه میفهمند: طول یکی متری، یکی سانتیمتری، ای بُعد: بُعد ۲ سانتی مثلاً.

وقتی میگویید **طول**، آیا مفهوم طول،هم طول دارد ای ندارد؟ چند متر است؟ طول، دیگر معنایش طول ندارد، اما مصداقش چرا، طول دارد.

ابتدا و انتهای مفهوم فاصله؟

فاصله؛ هر فاصله‌ای بینش دو نقطه است. هر فاصله‌ای اوّل دارد، آخر دارد، دو طرف دارد. آیا مفهوم فاصله هم دو طرف دارد یا ندارد؟ مفهوم ِفاصله، دو تا لبه ندارد؛ مصداقش است که دو تا لبه دارد. مفهوم فاصله، در آن فاصله نیست. این‌ها مفاهیمند.

شعاع داره؛ مفهوم فاصله یا مصداق فاصله؟

وقتی شما می‌گویید که فاصله‌ی بین مرکز داره با محیط داره، شعاع داره است. الآن آیا این فاصله‌ای که شما به کار بردید، مفهوم ِفاصله است یا مصداق آن است؟ این فاصله، مفهوم نیست؛ چون اوّل و آخر آن، دو تا نقطه است-از مرکز تا محیط داره-واقعاً بین این دو، فاصله‌ی خارجی مصداقی است. اما اگر مصداق است پس چرا تعیّن ندارد؟ شما مفهوم کلی فاصله را طوری در نظر گرفتید که با افراد مختلف، صدق کند.

پاسخ: عدد پی؛ نسبت سنجی در کلّی داره

قطر، **محیط**، دو تا مفهومانند. نسبت بین این دو تا مفهوم از نسب اربعه چیست؟ تباین است؛ هیچ قطری محیط نیست و هیچ محیطی هم قطر نیست. این از حیث مفهوم، روشن است. دوباره شما می‌گویید نه. من که می‌گویم نسبت بین محیط با قطر، مقصودم بین دو تا مفهوم از حیث مصادیقشان نیست که می‌گویید متبایناند؛ من در **یک** داره، نسبت سنجی می کنم. همین جا آیا باید داره‌ی مشخصی باشد تا نسبت برقرار بشود؟ نه؛ در کلّی ِداره بین محیط با قطر، نسبت برقرار می‌شود. کلّی به کلّی.

سؤال: عدد پی ِکلّی؛ دارای شکل؟

سؤال ما دقیق این است:

الآن که نسبت بین محیط با قطر کلی است، این قطر، این محیط و این نسبت این دو، به همین نحوی که الآن برقرار است، دارای شکل هستند یا نیستند؟ آن هایی که طرف نسبتاند، آن ها شکل دارند یا ندارند؟ اگر شکل دارند، مقدار بایِد داشته باشند. مقدارشان چه اندازه است؟ نامتعین است؟چطور شما یک شکلی دارید که اندازه‌اش نامتعین است. مگر ما شکل کلی هم داریم؟

الف) پاسخ ابتدایی: مراتب شکل

۱. شکل عقلانی: مفهوم بدون شکل

اصلاً شکل یک مفهوم عقلانی دارد. شکل، شکل ندارد. شکل، یک مفهوم کلی است.

۲. شکل مثالی منفصل: بدون تعیّن

اما مصداقش، یک داره می‌شود. داره، یک شکل است به حمل شایع. تفاوت این دو تا چیست؟ تفاوتش این است که شکل داره به عنوان یک شکل، از عالم مثال منفصل است و لذا بین الاذهان است؛ همه اذهان با هم در یک عالمی میروند که در منظر همه بشر است و آن را می‌بینند. آن عالم کجاست؟ مثال منفصل؛ مجرّد است به تجرد برزخی، آثار ماده را دارد ولی خود ماده را ندارد.

داره ۲ متری، به ذهن شما بد است. داره ۳ متری هم به ذهن دیگری بد است. اما شکل داره -نه کلّی ِشکل که عقلانی است- شعاعش چقدر است؟ شکل داره، قطرش چند متر است؟ اتفاقاً آن هایی که هندسه درس می‌دهند می‌گویند داره‌ای با قطر واحد، یا داره‌ای با شعاع واحد. پس در علم هندسه به راحتی شکل داره را درک می‌کنند. شکل هست، ولی تعیّن ِمقدار ِخاصّی از شعاع و قطر ندارم.

۳. شکل مثالی متصل: متعیّن

به محض اینکه یک داره را شعاع مِتری‌ک به آن بدهی، بگویی ۲ متر، ۳ متر، متشخّص شد؛ شد یک فرد داره‌ای که در قوه‌ی خیال ِمتصل موجود است. یعنی ذهن شما یک شعاع خاصی را به آن داد، حالا شد خیال متّصل.

پس شکل ِداره، شکل ِمربع، یک طبیعی است که خودش را در ضمن کمّ متصل قارّ در عالم ِمثال منفصل به ذهن ما نشان می‌دهد. اما ما چون الآن داریم او را به راحتی می‌بینیم، مثل بچه‌ای هستیم که هنوز تشخیص نمی‌دهیم که آن شکل منفصل برای عالم مثال منفصل، با آن شکل برای مثال

متصل که تصور می‌کنم تفاوت دارد.

-[illegible][1][illegible]

اینجاست که قدر این روایت را می‌دانید؛ خود عالم مثال، ۱۸۰۰۰ عالم است[2]. ما هنوز می خواهیم با یک زحمتی دوتایش را تفکیک کنیم. ۱۸۰۰۰ عالم است. عوالم با هم فرق دارند.

من نمی‌خواهم چیزی را ثابت کنم. می‌خواهیم آن چیزی که همه داریم ببینمش. ما وقتی در هندسه می‌گوییم نسبت محیط به قطر، محیط قطعاً کم است، خط است، طول است. اما چند متر؟ طولی است که متر فیزیکی ندارد. نمی‌خواهیم بگوییم چند متر است. قطعاً طول است، قطعاً تجرد تام نیست. چرا؟ چون طول شکل دارد و در قوه خیال ظاهر می‌شود. شکل داریره در قوه خیال حاضر می‌شود. اما این شکل دایره‌ای که احضارش می‌کنید، شما با عقلتان در مثال منفصل شکل دایره را می‌بینید. چند متر است؟ مثال منفصل، متر نمی‌خواهد. طول می‌خواهد، خط منحنی می‌خواهد، اما اندازه نمی‌خواهد. وقتی به عالم فیزیکی می‌آید اندازه می‌خواهد.

اشکال: ابهام در عالم مثال؟

ما طول مبهم داریم یا نداریم؟ اینکه همین ابهام سبب بشود برای نفی چنین صورتی در عالم مثال منفصل و ما بگوییم قطعاً این طول در عالم‌ِ مثال‌ِ منفصل نیست، این ملازمه و سببیّت برقرار نیست.

به خاطر اینکه عوالمی در مثال منفصل هست-اینطور که گفته اند و مدعی شده اند- که آن تفرّد فیزیکی‌ِ خارجی را خیلی نیاز ندارد. یادم می‌آید مرحوم میرزا جواد آقا ملکی تبریزی فرموده بودند که به یک میوه وقتی در عالم مثال نگاه می‌کنید، میوه در عین حال که سیب است، در همان حال پرتقال است. این برای ذهن ما الآن سنگین است.[3]روایت هم دارد. ذیل بحث میوه ممنوعه‌ای که حضرت آدم(علیه السلام) خورده است، بعضی می‌گویند خرما است، بعضی می‌گویند گندم است، انگور است حضرت فرمودند که همه این ها هست[4].

خلاصه نمی‌شود احکام‌ِ اینجا را بر آن ها جاری کرد. یک میوه را وقتی نگاهش می‌کند، هم سیب است هم پرتقال است. ما الآن می‌گوییم معقول نیست؛ تناقض می‌شود؛ اجتماع ضدین می‌شود.این را فقط اشاره مطرح کردم که اینطور ادّعا و نظر هست که عالم منفصلی از مثال داریم که خیلی احکامی که اینجا داریم، لازم نیست آنجا باشد. و لذا دایره‌ای که طولش مبهم است، در آنجا یک امر محالی نیست، ولی در عین حال شکل است، طول دارد؛ خواص ماده را دارد، ولی مادّیت مادّه را ندارد.

ب) پاسخ نهایی: بررسی یک احتمال

مثال‌های ما این را واضح کرده که شکل دایره، حتماً یک واقعیت منفصلی دارد، ولی این واقعیت منفصل تجرّد برزخی دارد؟ یعنی آثار ماده از شکل و طول و عرض و رنگ دارد که مثال منفصل بشود؟ یا نه، آن واقعیتی که دارد از سنخ معناست؛ از سنخ معنایی که به قوه خیال ما این طول و عرض و خواص مادّه را دستور می‌دهد.

عدد پی کلّی؛ معقول منفصل

تأمل کردم، دیدم احتمال قوی‌ای است- نمی‌شود از کنارش در شد-که این شکل به عنوان یک موجود نفسی در ذهن ما اصلاً معنا نداشته باشد. یعنی ذهنِ من و شما همه ،یک معانی ای مرکب که همه‌اش

از سنخ طبایع است، به عنوان فرمولی از معنا دارد که تا می‌گویید: «علامت جمع[5]»، فوری در قوّه-ی خیالتان، یک علامت جمع ترسیم می‌کند. راسِمَش، یک معنایی است که عقلتان درک کرده است. اگر آن معنای درکی را نداشتید، قوّه خیال شما، قوّه‌ی این که آن را ترسیم کند نداشت.

عکس های اس وی جی (SVG)

عکس‌هایی هست که همه در موبایل‌هایتان دارید؛ از سنخ اس وی جی(SVG) [6]. اگر کد این ها را ببینید، جز چند تا فرمول هیچ چیز دیگری نیست، صفحه‌ی مانیتور موبایلتان یا کامپیوترتان را تقسیم‌بندی کردید، با فرمول به آن می‌گویید این طور در مانیتور، عکس بکش، از اینجا به آنجا بکش. یک تصویر در می‌آید. ذهنِ‌ما در خزانه‌ی معانی خودش، یک فرمول معنایی دارد، حتّی بچه‌ای که در ذهنش، مثلّث می‌کشد، آن معناست که به او اجازه می‌دهد که بتواند در ذهنش یک مثلث رسم کند.

مثال‌هایش را همه شما شبیه این دستگاه های امروزی ببینید، آن که در دلِ‌حافظه‌ی کامپیوتر و موبایل است، نقش نیست، در دل آن، هرگز علامت جمع نیست، اما یک فرمولی، یک نظمی در دل حافظه‌ی او هست که نرم افزار وقتی به آن فرمول نگاه می‌کند، به صفحه نمایش دستور می‌دهد این علامت جمع را وضع کن. از نقطه‌ی فلان بکش به نقطه دیگر؛نگاشت ریاضی.

نگاشت

لفظ نگاشت دو جا به کار می‌رود:

لفظ نگاشت در فضای ریاضیات؛ تابع‌ِحوزه و دامنه[7].

نگاشت یعنی تصویر به تصویر؛مثل نقشه‌ی ایران کشیدن.

این مفهوم دوم را نمی‌شود اینجا بگویند.مقصود ما در اینجا، نگاشت ریاضی[8] است. مثل این که دستگاه شما آن چیزی که دارید در مانیتورش می‌بینید، فرق دارد با این دستگاهی که دیگری دارد در مانیتورش می‌بینند. گرچه آن مطلبی که در حافظه دستگاه شماست، یکی است، ولی مانیتورها دو تاست، یعنی دستوری که دستگاه شما می‌دهد که نگاشت کن، در مانیتور با آن فرق می‌کند.

---

[1] سؤال یکی از دوستان حاضر در جلسه درس

[2] سئل أمير المؤمنين صلوات الله عليه عن قول الله عز و جل: و كذلك نري إبراهيم ملكوت السماوات و الأرض قال الأصبغ بن نباتة: كنت جالسا بين يديه مطرقا إلى الأرض، فرفع يده إلى فوق ثم قال لي صلى الله عليه: ارفع رأسك فطرقت رأسي، فرفعت رأسي، فرأيت السقف قد انفرج و رأيت نورا ساطعا إلى تحت العرش، فحار بصري فرددته، ثم قال لي صلى الله عليه: اي ابن نباتة، فرأى إبراهيم ملكوت السماوات و الأرض هكذا، ثم قال صلى الله عليه: أطرق رأسك فطرقت رأسي ثم قال: ارفع رأسك، فرفعت رأسي و إذا السقف بحاله.ثم أخذ بيدي فقام و أخرجني

من البيت الذي كنا فيه فأدخلني ببيت آخر و خلع ثيابا كانت عليه و لبس ثيابا غيرها، ثم قال: لا تفتح عينك، فلبثت ساعة ثم قال عليه السلام: تدري أيني أنت؟ قلت: لا اي والي، قال صلى الله عليه: أنت في الظلمة التي سلكها ذو القرنين.فقلت له: جعلت فداك، أ تأذن لي حتى أفتح عيني؟فقال عليه السلام لي: افتح فإنك لا ترى شيئا، ففتحت عيني فإذا أنا في ظلمة لا أبصر فيها موضع قدمي، ثم سار قليلا و وقف و قال: أ تدري أيني أنت؟ قلت: لا اي والي، قال عليه السلام: أنت واقف على عين الحياة التي شرب منها الخضر عليه السلام، و سرنا قليلا إلى عالم آخر فسلكنا فيها فرأيتها كهيئة عالمنا هذا في نباته و ساكنه و أهله، ثم خرجنا إلى عالم ثان حتى وردنا على خمس عوالم ثم قال صلوات الله عليه: هذه ملكوت الأرض كما ترى و **هي ثمانية عشر ألف عالم،** كل عالم كهيئة ما رأيت.ثم أخذ بيدي فإذا نحن بالبيت الذي خرجنا منه، و نزع تلك الثياب و لبس ثيابه التي كانت عليه، و عدنا إلى مجلسنا، فقلت له: جعلت فداك، كم مضى من النهار؟فقال: ثلاث ساعات (المناقب (للعلوي) / الكتاب العتيق، ص: ۸۴-۸۵)

[3] بعضی از خواص باری عالم مثال مطلبی بیان داشتهاند که باری اکثر مردم قابل قبول نیست، اینان باری گفتههای خود از اخبار و روایتی که در حالات کاملین و صفات آنها رسیده استشهاد نمودهاند از جمله این فرمایش معصوم که میفرماید: کلنا محمد. همه ما محمد هستیم و یکلنا واحد. همه ما یکی هستیم، یا آن روایت که میگوید بعضی از نهرهای بهشتی مشروباتی دارد که طعم هر مطعوم و مشروبی در آن هست، اینان میگویند این بدان خاطر است که هر موجودی از موجودات آن عالم در برداردن همه خصوصیات موجودات دیگر آن عالم نیز هست، و لذا انسان در هر لحظهای جمیع لذاتی که در همه موجودات آن عالم وجود دارد با طعم مخصوص، و لذت خاص آنها، در هریک از آن موجودات میيابد بدون اینکه خصوصیتی از یکی از آنها از بین برود(اسرار الصلوه،۱۳۰)

[4] قال الإمام أبو محمد العسكري (عليه السلام): ...فقال تعالى: و لا تقربا هذه الشجرة شجرة العلم، فإنها لمحمد و آله خاصة دون غيرهم، و لا يتناول منها بأمر الله إلا هم، و منها ما كان يتناوله النبي (صلى الله عليه و آله) و علي و فاطمة و الحسن و الحسين (عليهم السلام) بعد إطعامهم اليتيم و المسكين و الأسير، حتى لم يجوعوا بعد جوع و لا عطشوا بعد عطش و لا تعبوا و لا نصبوا.و هي شجرة تميزت بين أشجار الجنة؛ إن سائر أشجار الجنة كان كل نوع منها يحمل نوعا من الثمار و المأكول، و كانت هذه الشجرة و جنسها تحمل البر و العنب و التين و العناب و سائر أنواع الثمار و الفواكه و الأطعمة، فلذلك اختلف الحاكون لذكر الشجرة، فقال بعضهم: هي برة، و قال آخرون: هي عنبة، و قال آخرون:هي تينة، و قال آخرون: هي عنابة. (البرهان في تفسير القرآن، ج1، ص: ۱۷۸)

در کتاب الثاقب فی المناقب ابن حمزه طوسی نیز چنین آمده است: فبینا نحن وقوف، إذ نحن بغمامة قد أظلتنا ببرق و رعد حتى قربت منا، فألقت بين يدي رسول الله (ص) سفرة عليها رمان، لم تر العيون مثلها، على كل رمانة ثلاثة أقشار: قشر من اللؤلؤ، و قشر من الفضة، و قشر من الذهب.فقال (ص) لي: قل: بسم الله و كل اي علي، هذا أطيب من سفرتك. و كشفنا عن الرمان، فإذا فيه ثلاثة ألوان من الحب: حب كاليواقوت الأحمر، و حب كاللؤلؤ الأبيض، و **حب كالزمرد الأخضر، فيه طعم كل شيء من الغذاة** (الثاقب في المناقب، ص:۵۸- 59)

در کافی شریف نیز در وصف رسول مکرم اسلام چنین آمده است:له حوض أكبر من بكة إلى مطلع الشمس من رحيق مختوم فيه آنية مثل نجوم السماء و أكواب مثل مدر الأرض عذب فيه من كل شراب و طعم كل ثمار في الجنة (الكافي (ط - الإسلامية) ؛ ج 8 ؛ ص۱۳۹)

[5] بحث از علامت جمع و ابعاد مختلف آن در مقاله«مثال دقیق، سؤال روان؛ ابزاری برای ارائه مجردات به همگان» قابل مشاهده است.

[6] در دنیای کامپیوتر دو نوع گرافیک برای عکس ها داریم : یکی Raster و دیگری Vector .

درRaster Graphics که به آن گرافیک شطرنجی هم گفته می شود ، تصویر ها به صورت پیکسلی هستند ، طبیعتا هر کدام از این پیکسل ها رنگ خاص خودشان را دارند و جداگانه ذخیره میشوند . همه ی فرمت های bmp، jpg ، و gif از این دسته هستند . ویژگی این مدل تصاویر این است که با بزرگ تر شدنشان، کیفیتشان کمتر میشود.

اما در Vector Graphics که به آن گرافیک بُرداری میگویند یک تصویر، مجموعه ای از نقطه ها ، خط ها ، منحنی ها و چندضلعی ها هست. این نوع گرافیک با مختصات ریاضی سروکار دارد. تصور کنید یک محور x و y ترسیم شده و هرکدام از این بردار ها با متوجه به مختصاتی که دارند ترسیم شدند و سرجای خودشان قرار گرفتند (منظور از بردار صرفا یک خط راست نیست). در این روش، به مرورگر دستور میدهیم در فلان نقطه، فلان بردار را ترسیم کن . در این مدل از تصاویر، کیفیت به اندازه وابسته نیست و به طور کلی مستقل از رزولوشن است .

اس وی جی مخفف عبارت *Scalable Vector Graphic* به معنای گرافیک برداری مقیاسپذیری نمونه یک تصویر SVG را در ادامه مشاهده می کنید.تصویر سمت چپ،نمونه دستور داده شده به رایانه و تصویر سمت راست،خروجی دستور به صورت تصویر است.(سایت ویرگول،مقاله اس وی جی چیه و چکار میکنه؟)


```
<!DOCTYPE html>
<html>
<body>

<h1>My first SVG</h1>

<svg width="100" height="100">
   <circle cx="50" cy="50" r="40" stroke="green"
stroke-width="4" fill="yellow" />
   Sorry, your browser does not support inline SVG.
</svg>

</body>
</html>
```

My first SVG

[7] به صورت ساده میتوان بیان کرد که دامنه یک تابع، شامل تمام مقادیری است که به عنوان ورودی به تابع داده میشوند و برد تابع نیز مجموعه مقادیر خروجی از تابع را در بر میگیرد.

اما مهمترین نکتهای که باید به آن توجه کنید این است که دامنه و برد، دو مفهوم اساسی در تعریف توابع هستند و با تغییر آنها تعریف تابع نیز تغییر میکند. در ادامه این مطلب از مجله فرادرس، این موضوع به صورت دقیق مورد بررسی قرار میگیرد و تعریف جامعی از دامنه، برد و همدامنه ارائه میشود.

همانطور که میدانید، یک تابع روی مجموعهای از ورودیها عمل میکند و مجموعهای از خروجیها را تولید میکند. بنابراین میتوان بیان کرد که هر تابع از یک سری ورودی و خروجی تشکیل شده است. برای آنکه مفهوم این موضوع را به صورت دقیق متوجه شوید، به مثال زیر توجه کنید.

مثال

درختی که در شکل زیر نشان داده شده است هر سال به اندازه ۲۰ سانتی متر رشد میکند.

بنابراین میتوان بیان کرد که ارتفاع درخت به میزان سن آن با استفاده از تابع h مرتبط است. این تابع را میتوان به شکل زیر نمایش داد.

$$h(\text{سن}) = \text{سن} \times 20$$

بنابراین در صورتی که سن درخت برابر با 10 سال باشد، ارتفاع آن مطابق با رابطه زیر، برابر با 200 سانتی متر خواهد بود.

$$h(10) = 200 \text{ cm}$$

رابطه فوق را میتوان اینگونه بیان کرد که تابع h، عدد 10 را به 200 تبدیل کرده است. بنابراین عدد 10 ورودی این تابع و 200 خروجی آن را نشان میدهد. این موضوع با استفاده از رابطه زیر نیز به خوبی نشان داده شده است.

$$10 \rightarrow 200$$

ورودی و خروجی یک تابع

نکته بسیار مهمی که باید به آن توجه کنید این است که، تمامی مقادیر و اعداد را نمیتوان به عنوان ورودی به تابع معرفی کرد و اگر به تابع ورودی اشتباه بدهیم، ممکن است که تابع عمل نکند و هیچ خروجی را به ما تحویل ندهد.

دانستن اطلاعات کلی درمورد خروجیهای تابع نیز امر بسیار مهمی است. برای مثال اگر بدانیم که این تابع تنها مقادیر مثبت را به عنوان خروجی به ما تحویل میدهد، درک مسئله برای ما بسیار سادهتر خواهد بود.

علاوه بر موارد ذکر شده، میتوان بیان کرد که یک تابع، روی مجموعههای مشخصی عمل میکند. در ادامه برخی از این مجموعهها را مورد مطالعه قرار میدهیم.

به عنوان مثال اول، مجموعه تمام اعداد زوج (مثبت و منفی) را میتوان با استفاده از مجموعه اعداد زیر نمایش داد.

$$\{..., -4, -2, 0, 2, 4, ...\}$$

مشابه مثال بالا میتوان مجموعه اعداد صحیح فرد را نیز به شکل زیر نمایش داد.

$$\{...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...\}$$

در ادامه مجموعهای شامل تمام اعداد اول را مورد بررسی قرار میدهیم. توجه کنید که عدد اول، یک عدد طبیعی بزرگتر از یک است که به هیچ عددی به غیر از یک و خود آن عدد، بخش پذیر نیست. مجموعه این اعداد در رابطه زیر نشان داده شده است.

فیلمهای آموزشی مرتبط

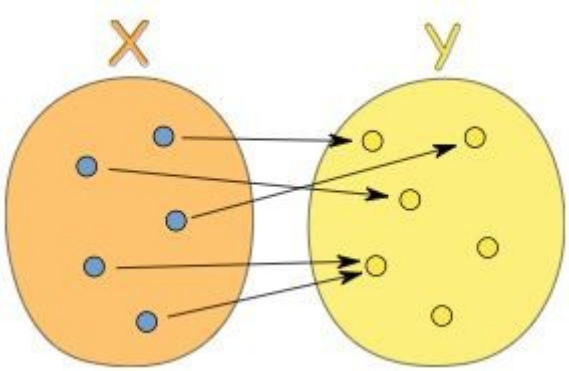
$$\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...\}$$

علاوه بر موارد ذکر شده، مجموعه‌ها را می‌توان به اعداد طبیعی، صحیح و گویا نیز محدود کرد. به غیر از مجموعه‌های کلی که در بالا اشاره شد، امکان دارد مجموعه‌های دلخواهی نیز در توابع به عنوان ورودی یا خروجی تعریف شوند. برای مثال ممکن است ورودی یک تابع تنها شامل اعداد مثبت کوچکتر از ۱۰ و مضرب ۳ باشد. این مجموعه دلخواه را به شکل زیر نمایش می‌دهند.

$$\{3, 6, 9\}$$

به صورت کلی می‌توان بیان کرد که یک تابع، هرکدام از اعضای یک مجموعه را دقیقا به یکی از اعضای مجموعه دیگر مرتبط می‌کند. توجه کنید که ممکن است دو مقدار از مجموعه اول (دامنه) به یک مقدار از مجموعه دوم (برد) منتقل شوند.

نکته مهم دیگر این است که اگر یک مقدار از مجموعه اول (دامنه) به دو مقدار از مجموعه دوم (برد)، مرتبط شود، با تعریف تابع در تضاد است و این عملگر را نمی‌توان تابع نامید. تعریف تابع و مجموعه دامنه و برد در شکل زیر به خوبی نشان داده شده است.



دامنه و برد چیست

دامنه یک تابع، مجموعه‌ای است که به عنوان ورودی تابع در نظر گرفته می‌شود و برد تابع، مجموعه‌ای است که تمامی خروجی‌های تابع را در بر می‌گیرد.

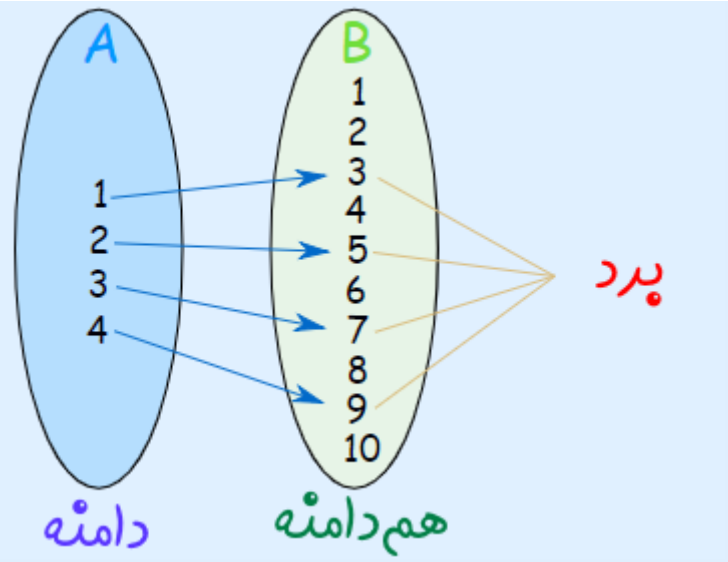
مجموعه دیگری نیز تحت عنوان همدامنه در تعریف تابع حضور دارد. همدامنه شامل مجموعه‌ای از اعداد است که خروجی تابع می‌تواند جزئی از آن‌ها باشد. همدامنه را دامنه مشترک نیز می‌نامند. برای مشخص شدن مفهوم این تعاریف به مثال زیر توجه کنید.

مثال

تابعی با رابطه زیر را در نظر بگیرید.

$$x \rightarrow 2x+1$$

این تابع مانند شکل زیر بین مجموعه‌های A و B عمل می‌کند و هر عضو مجموعه A را به یک عضو مجموعه B مرتبط می‌سازد.



شکل ۴: مفهوم دامنه، برد و همدامنه

بنابراین مجموعه A، دامنه تابع را نمایش می‌دهد و مجموعه B، همدامنه را مشخص می‌کند. توجه کنید که همدامنه را معمولا صورت مسئله تعیین می‌کند و برد، زیر مجموعه‌ای از این همدامنه است.

در این مثال، برد تابع، مجموعه‌ای است که اعداد 3، 5، 7 و 9 را شامل می‌شود. برد این تابع زیر مجموعه‌ای از همدامنه (مجموعه B) است. این سه مجموعه یعنی دامنه، همدامنه و برد را می‌توان به کمک مجموعه‌های زیر هم نمایش داد.

دامنه : {1, 2, 3, 4}
هم‌دامنه: {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}
برد : {3, 5, 7, 9}

اجزای مختلف یک تابع

در تعریف تابع، دامنه و برد نشان دادیم که آنچه که از تابع بیرون می‌آید (برد تابع) وابستگی مستقیم به ورودی تابع (دامنه تابع) دارد. بنابراین می‌توان بیان کرد که یکی از مهمترین بخش‌های تابع، دامنه آن است و تغییر دامنه باعث تغییر خروجی تابع و ویژگی‌های مختلف آن تابع می‌شود.

برای مشخص شدن مفهوم این قضیه به مثال زیر توجه کنید.

مثال

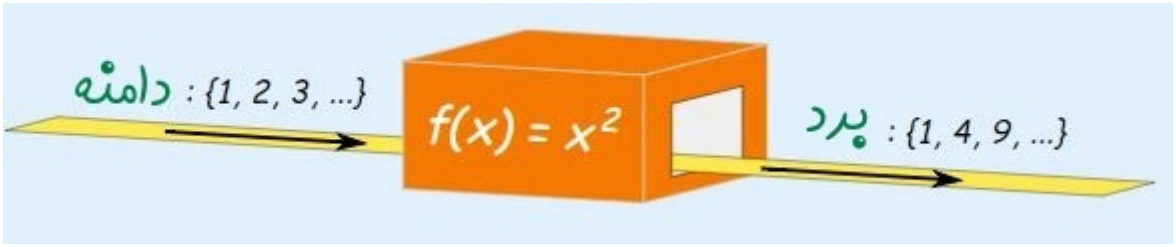
تابع ساده‌ای را که رابطه آن به فرم $f(x)=x2$

است را در نظر بگیرید. دامنه این تابع یعنی آنچه به عنوان ورودی به تابع داده می‌شود را می‌توانیم مجموعه‌ای شامل اعداد طبیعی به فرم $\{1,2,3,...\}$

تعریف کنیم. با استفاده از این دامنه و رابطه تابع، برد تابع به فرم مجموعه زیر در می‌آید.

{1,4,9,...}

این تابع با استفاده از دامنه و بردی که در بالا تعریف شد، به صورت زیر مشخص می‌شود.



شکل 5: مفهوم دامنه و برد تابع

حال تابع دیگری که رابطه مشابهی با تابع قبلی دارد را در نظر بگیرید. این تابع را با حرف g و با استفاده از رابطه $g(x)=x^2$

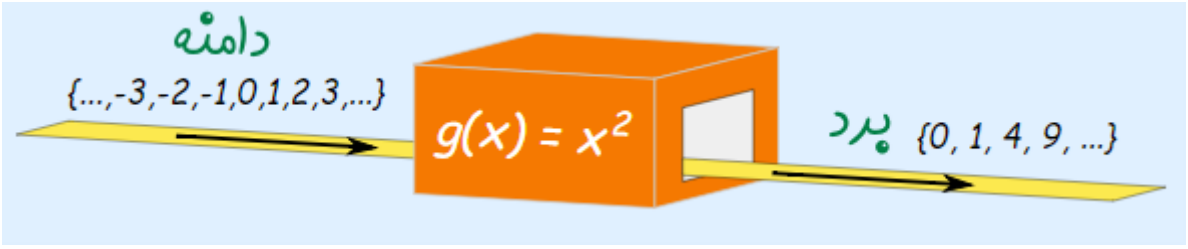
می‌توان مشخص کرد. دامنه این تابع را به صورت مجموعه تمام اعداد صحیح به فرم زیر در نظر بگیرید.

$$\{...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...\}$$

در این شرایط، برد تابع به شکل زیر در می‌آید.

$$\{0,1,4,9,...\}$$

توجه کنید که برد تابع جدید نسبت به حالت قبل یک عدد صفر (0) بیشتر دارد. این تابع، دامنه و برد آن را می‌توان به شکل زیر نمایش داد.



شکل 6: مفهوم دامنه و برد تابع

همانطور که مشاهده می‌شود، هر دو تابع مجزور ورودی را به عنوان خروجی تحویل می‌دهند ولی از آنجایی که این دو تابع ورودی و دامنه متفاوتی دارند، خروجی و برد آن‌ها نیز متفاوت خواهد بود.

توجه کنید که خواص این دو تابع نیز متفاوت است. در حالت اول، تابع f، به صورت یک به یک است و به ازای هر ورودی یک خروجی را تولید می‌کند. این در حالی است که تابع g یک به یک نیست و به ازای دو ورودی مختلف، یک جواب یکسان را تولید می‌کند. این موضوع در دو رابطه زیر نشان داده شده است.

$$g(-2)=4$$

$$g(2)=4$$

بنابراین با توجه به مثال و توضیحات بالا، می‌توان نتیجه گرفت که یکی از بخش‌های اساسی تابع، دامنه آن است. انواع مختلف دامنه می‌تواند ویژگی‌های گوناگون تابع را تحت تاثیر خود قرار دهد. (سایت فردرس، مقاله دامنه و برد تابع)

[8] ایده اصلی برای بهره‌گیری از رابطه بین متغیرها و تعریف تابع در قرن ۱۷ میلادی شکل گرفت و تحلیل خصوصیات توابع، باعث بوجود آمدن شاخه «حساب‌ان» (Calculus) در ریاضیات شد. در آن زمان فقط «تابع حقیقی» (Real Function) یا توابع با متغیرهای «حقیقی مقدار» (Real Valued) مورد بحث واقع شده و فرض بر این بود که همه توابع «هموار» (Smooth) هستند. موضوعات مربوط به تابع و نگاشت همچنین دامنه و همدامنه، بعدها در قرن ۱۹ توسط ریاضیدانان، مورد پژوهش واقع شد. بنا به اهمیت توابع و نقش آن‌ها در ریاضیات پایه و عمومی، این نوشتار از مجله فردرس را به این گونه توابع اختصاص داده‌ایم. البته در این بین تفاوت تابع حقیقی و نگاشت (Map) نیز بیان شده و خصوصیات هر یک مورد بحث قرار می‌گیرد.

تعریف تابع و نگاشت در ریاضیات

به طور شهودی، می‌توان تابع را یک فرآیند یا «عمل‌گر دو دویی» (Binary Operation) در نظر گرفت که به واسطه آن هر عنصری از یک مجموعه به یک عنصر به مجموعه دیگر مرتبط می‌شود. البته نحوه ارتباط در اینجا دارای شرایطی است که در ادامه به آن خواهیم پرداخت.

به طور رسمی تابع f از مجموعه X به مجموعه Y به صورت یک مجموعه است که شامل زوج‌های مرتبی مثل (x,y) بوده که عنصر اول آن از مجموعه X گرفته شده و مولفه دوم آن نیز متعلق به مجموعه Y است. در این بین شرطی وجود دارد که طی آن هر عنصری از X نباید بیش از یک بار در تابع یا مجموعه زوج‌های مرتب، به کار رفته باشد. به بیان دیگر نباید به ازاء یک مقدار از مجموعه X دو مقدار در تابع یا مجموعه Y پیدا شود.

نکته: اگر چنین اتفاقی بیافتد، مجموعه زوج‌های مرتب را یک «رابطه» (Relation) می‌نامند. پس هر تابع یک رابطه است ولی هر رابطه، یک تابع نیست.

نگاشت در ریاضیات

اغلب هر تابع را یک «نگاشت» (Map) در نظر می‌گیرند ولی بعضی ریاضیدانان، برای مفهوم نگاشت و تابع، تمایز قائل می‌شوند. برای مثال «سرژ لانگ» (Serge Lang)، ریاضیدان آمریکایی-فرانسوی، تابع را برای نگاشت‌هایی که همدامنه آن زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی یا مختلط است به کار می‌برد و معتقد است که نگاشت حالت کلی‌تری از تابع را شامل می‌شود.

از طرفی، اغلب منظور از نگاشت همان «همریختی» (Homomorphism) است. مثلا برای نشان دادن یک گروه همریخت از G به H از اصطلاح نگاشت خطی یا نگاشت از G به H استفاده می‌کنند. گاهی هم زمانی یک تابع را نگاشت می‌نامند که همدامنه آن دقیقا منطبق با مجموعه مقادیر تابع باشد. به H از اصطلاح نگاشت خطی یا نگاشت از G به H استفاده می‌کنند. گاهی هم زمانی یک تابع

ار نگاشت می‌نامند که همدامنه آن دقیقا منطبق با مجموعه مقادیر تابع باشد.(سایت فرادرس، مقاله تابع حقیقی و نگاشت در ریاضیات)

جمع بندی

با این حساب، برهان ِما فعلاً اثبات نکرده که یک نقشی منفصل داریم که آن را از مثال ِمنفصل، احضار کنند و به چنگ بیاورند.

عدد پی؛ ابزار ارائه معنای منفصل

ما آن را که به وضوح داریم، یک **معنای منفصل**[1] است از آن نقش. این معنا را من و شما، همه داریم. به محض اینکه به آن معنا توجه میکنیم، آن معنا در صحنه ی ذهن من و شما که به منزله مانیتور است، فوری میگوید یک بستر فراهم کن، رزولشن درست کن، پیکسل‌هایش را بگذار، در آن پیکسل‌ها این ها را حذف کن. یعنی خود معنا این دستور را میدهد.

سؤالات ما فعلاً یک واقعیت این چنینی را به‌طور واضح، منفصل میکند. برایش اثبات میکند که شکی در آن نیست.منفصل یعنی اگر ما هم نبودیم، بود. انسان نبود، ذهن او هم نبود، این چنین بود. تمام کسانی که با مفاهیم هندسی و ریاضی آشنایی مختصر داشته باشند، حرف های ما را **میبینند** که در خودشان اینها را دارند ؛ نه این که برایشان اثبات بشود، اما مثال منفصل را نه؛ هنوز تا این اندازه فاصله داریم که بتوانیم نشان بدهیم که ببین! ما یک نقش منفصل داریم که او را فراچنگ آوردیم، ولی ما به مقصودمان رسیدیم. چون برایمان کافی است که بگوییم پشتوانه‌ی این نقش، یک معناست.

---

[1] یک معقول منفصل نه مثال منفصل