مقدمه ۳) بی نهایت و اقسام آن

اقسام بی نهایت

ما دو نوع بی نهایت درست و حسابی، داریم:

۱. بی نهایت بسیار بزرگ

بی نهایتهای متعیّن افزایشی؛ بی نهایت های بسیار بزرگ[1].

۲. بی نهایت بسیار کوچک

بی نهایتهای متعیّن کاهشی؛ بی نهایت های بسیار کوچک[2] .

بی‌نهایت ها در دستگاه ارسطویی

از زمان ارسطو، تمام بی نهایت ها، چه بی نهایت بزرگ و چه بی نهایت کوچک را با بی نهایت بالقوّه حل می کردند.

بی نهایت بسیار بزرگ: لا یقف

بی نهایت بزرگ را می گفتند: لایقف .

بی‌نهایت بسیار کوچک: بالقوّه

بی نهایت کوچک را می گفتند: بالقوّه . ما هم با این دوتا خیلی مانوس هستیم چون مبنای کتابهای ما هم معمولاً ارسطویی است. انسان خودش را قانع میکند به بی نهایت ِلا یقفی و کار تمام میشود[3].

بی‌نهایت ها در ریاضیات عالی امروزه

اما از حدود ۲۰۰ سال قبل تا حال که ریاضیات عالی و آنالیز[4] کامل پیشرفت کرده و مباحثش امروز برای بشر مثل خورشید شده،

بی‌نهایت ِبالفعل

واضح است که در بی نهایت کوچک، بی نهایت ِبالفعل ِنفس الامری است.می توانم بگویم بی‌نهایت ِمجسّم، بی‌نهایت ِدر مشت. می‌گویی بیا، بی‌نهایت ِبالفعل را در مشتت می‌گذارم و جلوی چشمت می‌آورم؛ بالاتر از این می‌خواهی؟!

---

[1] به گزارش بی‌گ بنگ، ما اخیرا به دنبال بزرگترین عدد معنی‌دار در جهان گشتیم، اما هم این باید در مقایسه با بی نهایت بسیار خرد باشند. ریاضیدانان بی نهایت را با سختگیری بالایی تعریف می کنند. اما ما تعریف وسیعتر و رایجتری را مد نظر قرار خواهیم داد: بی نهایت هر عددی را شامل می شود که محدود ای متناهی نیست. خب حالا بگذارید ذهنمان را محدود نکنیم و به جزئیات بی نهایت بپردازیم.

آغاز بی نهایت

برای صحبت درباره بی نهایت، باید در ابتدا راهی برای تعریف آن از منظر ریاضی پیدا کنیم که البته کار ساده‌ای نیست. اگرچه مفهوم بی نهایت با یونانیان باستان شناخته می شود و در محاسبات آرشیمدس لحاظ شده است، اما بی نهایت تا اواخر دهه ۱۸۰۰ میلادی به صورت جامع تعریف نشده بود. قبل از آن، بی نهایت صرفا یک مفهوم ِگسترده و بی شکل بود؛ بیشتر مانند یک اثر هنری با عملیات ریاضی خاص، نَه چیزی که ارزش فهمیدن داشته باشد. در حقیقت، ریاضیدانان زیادی در قرن نوزدهم از بی نهایت بعنوان مفهومی ناخوشایند و مبهم یاد می کردند و باور داشتند که هیچ جایگاهی در مباحث ریاضی جدی ندارد. در بهترین حالت، بی نهایت موضوعی بود که می‌توانست در میان فلاسفه به بحث گذاشته شود. در همین مضمون بود که «جورج کانتور» نخستین شواهد از وجود بی نهایت را در سال ۱۸۷۴ منتشر کرد. او که در روسیه به دنیا آمده و در آلمان بزرگ شده بود، شواهدی شگفت‌انگیز و بحث برانگیز ارائه داد که نه تنها ماهیت بی نهایت را تعریف کرد، بلکه حتی مشخص نمود که بی نهایت‌های متعددی وجود دارد و برخی بی نهایت‌ها بزرگتر از دیگری بودند. آنچه این دستاورد را بسیار قابل توجه کرد این بود که او کل شواهد را از یک شاخه باستانی و به ظاهر بی‌مصرف از ریاضی بدست آورده بود که به نظریه «مجموعه‌ها» مشهور شد.

نظریه مجموعه‌ها

نظریه مجموعه (Set Theory) به طرز خنده‌آوری ساده به نظر می آید، اما بعنوان یکی از قوی‌ترین ابزارها در ریاضی مدرن شناخته می شود. ایده اساسی آن را می توان در کارهای ارسطو جستجو کرد که بیان می دارد: اعداد می توانند در مجموعه‌هایی گروه‌بندی شوند. همین. البته خود این گزاره را می توان به صورت خلاصه در آورد: اشیا را می توان در مجموعه‌هایی گروه‌بندی کرد. می توانید اعداد 1، 2، 3 و 4 را در مجموعه {1، 2، 3، 4} قرار بدهید و آن را مجموعه «الف» نام‌گذاری کنید. حتی می توانید حرف «د»، ساندویچ ماهی، رمان توماس هاردی و سیاره نپتون را در مجموعه {«د»، ساندویچ ماهی، رمان توماس هاردی و سیاره نپتون} قرار دهید و آن را مجموعه «ب» بنامید.

خب لابد فکر می کنید این نظریه چیزی نیست که شما را تحت تاثیر قرار بدهد، اینطور نیست؟ اما نکته جالب توجه این است که ما فقط چند گام با آن نگرش بزرگ در راستای افشای

بی نهایت فاصله داریم. حالا بگذارید فرض کنیم شما آن دو مجموعه‌ای را که در بالا توصیف کردیم، با هم مقایسه می‌کنید. کدام یک بزرگ‌تر است، مجموعه الف یا مجموعه ب؟ اگر در قالب عبارات فردی درباره آن فکر کنید، شاید یک تکلیف بی معنی بنظر برسد؛ برای مثال، چطور می‌توانید رمان توماس هاردی را با عدد ۳ مقایسه کنید؟ در اینجا، نکته کلیدی این نیست که به عبارات خاص نگاه کنید، بلکه باید به تعداد عبارات توجه کنید. چون چهار عبارت در هر دو مجموعه وجود دارد، آنها اندازه یکسانی دارند.

چطور استنباط کردید که چهار عبارت در هر دو مجموعه وجود دارد؟ حدس می‌زنم اکثر شما به سادگی تعداد عبارات موجود در هر مجموعه را شمرده و سپس آنها را مقایسه کرده‌اید. اما بگذارید فرض کنیم شما هیچ چیزی درباره اعداد نمی‌دانستید و نحوه شمارش را بلد نبودید. در این صورت چطور می‌توانستید دو مجموعه را مقایسه کنید؟ خب این سوال قدری عجیب و غریب به نظر می‌آید، اما بخشی از آنچه نظریه مجموعه را جالب و قوی می‌کند این است که می‌تواند به طور کامل جدا از تمامی دیگر ریاضیات باشد؛ یعنی ما نیازمند راهی برای مقایسه مجموعه‌ها بدون تکیه بر شمارش هستیم.

حتی اگر اصلا نمی‌دانستید چند عبارت در هر یک از آن دو مجموعه وجود دارد، همچنان مقایسه آنها می‌تواند کار ساده‌ای باشد. فقط باید به مجموعه «الف» نگاه کنید و با عبارتی در مجموعه «ب» تطبیق دهید. شما باید این فرایند را تا آنجایی ادامه دهید که دیگر هیچ عبارتی در مجموعه‌های الف و ب باقی نمانده باشد. با رفتن از چپ به راست، می‌توانید ۱ را با «د»، ۲ را با «ساندویچ»، ۳ را با رمان «توماس هاردی» و ۴ را با «سیاره نپتون» جفت کنید. بدون نیاز به دانستن دقیق اینکه چند عبارت در هر مجموعه وجود دارد، می‌دانیم که دو مجموعه اندازه یکسانی دارند. این عامل با عنوان «تناظر یک به یک» شناخته می‌شود و این اجازه را به ما می‌دهد تا بدون نیاز به شمردن عبارات موجود در مجموعه‌ها به مقایسه آنها بپردازیم. احتمالا می‌توانید ببینید که آن بخش آخر چگونه ما را به آستانه در بی نهایت می‌برد. تاکنون، فقط وانمود می‌کردیم که نمی‌توانیم تا چهار بشماریم، اما اگر مجموعه‌ای با عبارات بی نهایت درست کنیم، چه می‌شود؟ مثالی که از قدیم وجود دارد این است که یک مجموعه حاوی اعداد طبیعی می‌باشد و همه‌شان اعداد صحیح غیرمنفی هستند که با صفر شروع می‌شود.

مفهوم ریاضی الف صفر

در الف صفر، مجموعه‌ای داریم که به طور کلی از اعداد طبیعی تشکیل یافته است. حالا کدام یک بزرگ‌تر است، الف صفر یا الف صفر +۱؟ وقتی درباره بزرگترین اعداد متناهی حرف می‌زنیم، مفهوم «به اضافه ۱» همواره خود را نشان می‌دهد. با دلایل خوب، همواره می‌توانید ۱ را به عددی متناهی اضافه کرده و چیزی حتی بزرگتر بدست آورید. اما آیا این در خصوص الف صفر هم کارساز است؟ خب، بگذارید «ساندویچ ماهی» را از مجموعه خودمان قرض بگیریم و به مجموعه اعداد طبیعی اضافه کنیم؛ خب حالا مجموعه‌ای با عبارات «الف صفر به اضافه ۱» داریم.

همانطور که ذکر شد، تنها راه مقایسه این دو مجموعه، استفاده از تناظر یک به یک است. ساندویچ ماهی را در آغاز یک مجموعه قرار می‌دهیم و مجموعه «پ» نامگذاری می‌کنیم، اما مجموعه «ت»، مجموعه‌ای است‌اندارد از اعداد طبیعی خواهد بود. پس مجموعه «پ» عبارتست از {ساندویچ ماهی، ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ ...}، اما مجموعه «ت» عبارتست از {۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ ...}. ام ساندویچ ماهی را با صفر، صفر را با ۱، ۱ را با ۲، ۲ را با ۳، ۳ را با ۴ و ۴ را با ۵ ... تطبیق خواهیم داد. هنوز عبارات بی نهایت در هر دو مجموعه وجود دارد و می‌توانیم بدون اینکه عبارتی کم بیاوریم، تا آنجا که دوست داریم از تناظر یک به یک بهره ببریم. یعنی الف صفر و الف صفر به اضافه ساندویچ ماهی دقیقا یکسان و برابر هستند.

این یک نتیجه واقعا عجیب و دور از عقل سلیم است. گئورگ کانتور این جمله مشهور را در هنگام بحث پیرامون ریاضی مواری بی نهایت به زبان آورد: «آن را می بینم، ولی باورش نمی کنم.» و مسئله از این هم عجیبتر می شود. در اینجا یک سوال مطرح می شود؛ کدام مجموعه بزرگتر است، مجموعه اعداد طبیعی زوج یا مجموعه‌ای که تمامی اعداد آن طبیعی‌اند؟ یک دیدگاه متناهی به ما می گوید که همه اعداد زوج و فرد باید دو برابر همه اعداد زوج باشند، اما تناظر یک به یک مشخص می کند که تا زمانی نظریه مجموعه در کار است، آن دو برابر هستند. وقتی بی نهایت را به ۲ ضرب می کنید، هنوز با بی نهایت روبرو هستید.

حال اجازه دهید یک چالش جدی را مطرح کنیم. خب در مورد مجموعه‌ای با اعداد تمام منطقی چه شرایطی حاکم است؟ یعنی تمام اعدادی که می توانند بعنوان کسری از دو عدد صحیح بیان شوند. ما درباره مجموع بی نهایت بزرگ {...، ۵/۱، ۴/۱، ۳/۱، ۲/۱، ۱/۱} حرف می زنیم که مجموعه بی نهایت بزرگ {...، ۵/۲، ۴/۲، ۳/۲، ۲/۲، ۱/۲} و مجموعه بی نهایت بزرگ {...، ۵/۳، ۴/۳، ۳/۳، ۲/۳، ۱/۳} و غیره پس از آن مجموعه وجود دارند. ما در مورد مقداری بی نهایت از مجموعه‌های بی نهایت حرف می زنیم.

اگر قرار باشد چیزی ما را به عدد بی نهایت بزرگتری از الف صفر نزدیکتر کند، باید فقط به شیوه فوق عمل کرد، این طور نیست؟ می توانیم تناظر یک به یک را میان همه اعداد طبیعی و همه اعداد منطقی انجام دهیم، به طوری که ۱ صورت کسر باشد، اما همچنان کفایت نمی کند. ولی هنوز می توان یک تناظر یک به یک میان دو مجموعه تشکیل داد. برای اینکه نشان دهیم چطور می توان چنین کاری انجام داد، باید جدول ساده‌ای درست کنیم. بگذارید تمامی اعداد منطقی را که در آن ۱ صورت کسر است، در ردیف اول قرار دهیم، همه اعداد منطقی با ۲ به عنوان صورت کسر در ردیف دوم قرار دهیم و این کار را تا زمانی انجام دهیم تا ستونها و ردیفهای بیشماری داشته باشیم:

۱/۱, ۱/۲, ۱/۳, ۱/۴, ۱/۵ ...

۲/۱, ۲/۲, ۲/۳, ۲/۴, ۲/۵ ...

۳/۱, ۳/۲, ۳/۳, ۳/۴, ۳/۵ ...

۴/۱, ۴/۲, ۴/۳, ۴/۴, ۴/۵ ...

۵/۱, ۵/۲, ۵/۳, ۵/۴, ۵/۵ ...

...

خب می دانیم که جالب به نظر نمی رسد، اما در اینجا شاهد بخشهای آغازین یک جدول بی نهایت هستیم و همه اعداد منطقی ممکن در اینجا نمایان خواهند شد. این واقعیت که ما توانسته‌ایم در هر صورت این جدول را بسازیم، اعلام می دارد که تناظر یک به یک امکانپذیر است، اما بگذارید ببینیم دقیقا چطور می توان این کار را انجام داد. در ابتدا، عدد طبیعی اول ۰ را با ۱/۱ تطبیق دهید. بعد، به قسمت پایین ستون بروید و ۱ را با ۱/۲ تطبیق بدهید. حال به صورت مورب به بالا بروید و ۲ را با ۲/۱ تطبیق بدهید. سپس، به ستون اول بازگردید و ۳ را با ۱/۳ تطبیق دهید. در صورت حرکت به صورت مورب، ۴ با ۲/۲ و ۵ با ۳/۱ مطابقت پیدا می کند. می توانیم این کار را برای هر دو مجموعه به طور بی نهایت انجام داد. این واقعیت که سرعت حرکت ما در اعداد طبیعی بسیار سریع تر از اعداد منطقی است، اهمیت ندارد. آنچه اهمیت دارد این است که راهی برای آرایش اعداد منطقی در یک مجموعه بی نهایت پیدا کرده‌ایم.(سایت بیگ بنگ، مقاله درآمدی مختصر بر مفهوم بی نهایت)

[2] بی‌نهایت کوچک‌ها، کمیت‌هایی هستند که بیش از هر عدد حقیقی استاندارد به صفر نزدیک‌اند ولی صفر نیستند. این اعداد در مجموعهٔ اعداد حقیقی معمول وجود ندارند ولی در سیستم‌های عدد دیگر مثل اعداد سوررئال و اعداد ابرحقیقی وجود دارد.(سایت ویکی پدیا)

تاریخچه مفهوم شگفت انگیز بی نهایت، از گذشته های دور ذهن ریاضی دانان را به خود مشغول کرده بود. هر چند برخی معتقدند که مفهوم بی نهایت برای نخستین بار در تمدن هند باستان مطرح شده است، اما می توان گفت که نخستین کار جدی در مورد بی نهایت در عرصه ریاضیات به دوران یونان باستان و تحقیقات اقلیدس بر روی اعداد اول باز می گردد. اقلیدس در کتاب مشهور " اصول " خود هر چند مستقیماً نامی از بی نهایت نمی برد، اما به طور ضمنی به آن اشاره می کند که " بزرگترین عدد اول، از حاصل ضرب هر تعداد مفروضی از اعداد اول هم بزرگتر است ". پس از اقلیدس، پژوهش در مورد بی نهایت توسط سایر ریاضی دانان همچنان ادامه یافت تا سرانجام نماد ? به عنوان نماد این مفهوم اسرارآمیز پا به عرصه ریاضیات گذاشت. با آغاز عصر جدید، پژوهش در مورد بی نهایت همچنان ادامه یافت. در این دوران " گاتفریدویلهلم لایبنیتز" و " ایزاک نیوتن " برای نخستین بار از وجود مفهوم جدیدی به نام " بی نهایت کوچک " در عرصه ریاضیات پرده برداشتند. بی نهایت کوچک که عملا از همان مفهوم بی نهایت مشتق شده است، عددی مثبت است که از هر عدد مثبت مفروض دیگری کوچکتر است. بدین ترتیب " بی نهایت " به همراه پسر عموی کوچک خود یعنی بی نهایت کوچک، پایه های عرصه بدیعی از ریاضیات به نام " حساب دیفرانسیل و انتگرال " (حسابان) را شکل دادند و این گونه بود که بی نهایت عملا به مهمترین مفهوم در علوم و مهندسی جدید تبدیل شد.(سایت بیگ بنگ، مقاله کانتور و اسرار بی نهایت)

کمیت های بی‌نهایت کوچک یا infinitesimals تاریخ پر فراز و نشیبی در ریاضیات داشته اند. استفاده از این مفهوم در طی قرون ۱۲ تا ۱۶ میلادی در میان ریاضیدانان هندی معمول بوده است. به هنگام اولین مراحل توسعه حساب دیفرانسیل و انتگرال در قرن هفدهم، ریاضیدانانی همچون لایبنیتز برای توضیح و تسهیل انجام عملیاتی که اکنون با عنوان فرایند حدگیری شناخته می شود، آزادانه از آنها استفاده می کردند.

استعمال این مفاهیم به گونه ای غیر رسمی انجام می گرفت و اگرچه به نظر می رسید که این استعمال بر مبنای یک درک شهودی قوی صورت می گیرد، با این حال احساس شد که مباحث مرتبط با کمیت های بی‌نهایت کوچک حتی می تواند منجر به نتایج نادرست گردد. لذا این کمیت ها در نظر ریاضیدانان مبدل به چیزهایی نامطلوب شدند و این در حالی بود که همچنان، اگرچه به طور غیر سیستماتیک، مورد استفاده فیزیکدانان و مهندسان قرار داشتند. حتی ادعا شد که ایده یک کمیت بی‌نهایت کوچک ذاتا با خودش در تناقض است.این ادعای اخیر کاملا بی مورد است. آنچه حقیقتا می توانست گفته شود این بود که دستگاه های کلاسیک اعداد (همچون مجموعه اعداد گویا) که در آنالیز مورد استفاده قرار می گیرند دارای عنصر بی‌نهایت کوچکی غیر از صفر نیستند. همواره این بحث مطرح بوده است که آیا دستگاه اعداد مفیدی می توان یافت که کمیت های بی‌نهایت کوچک را نیز داشته باشد؟

لایبنیتز معتقد بود که باید این امکان وجود داشته باشد که دستگاهی از اعداد ساخته شود که هم شامل کمیت های بسیار بزرگ است و هم کمیت های بسیار کوچک را در بر دارد و در عین حال همان مناسباتی که در بین اعداد معمولی وجود دارد در این دستگاه نیز برقرار باشد. اما تقریبا بلافاصله انتقاداتی جدی نسبت به استفاده از مفهوم بی‌نهایت کوچک مطرح شد و تلاشهایی صورت گرفت تا حساب دیفرانسیل و انتگرال بر مبنایی که عمیقا بتوان به آن متکی بود شکل گیرد. بالاخره در قرن نوزدهم واپراشتراس نظام کاملا سخت‌گیرانه و منطقی را پدید آورد که به شدت بر پایه دستگاه اعداد حقیقی (که همانطوری که می دانیم دارای خاصیت ارشمیدسی است و لذا عنصر بی‌نهایت کوچک غیر صفر ندارد) و آنچه که امروزه تحت عنوان تعریف حد(با اپسیلن

و دلتا) شناخته می شود استوار بود.

اما در دهه ۱۹۶۰ Abraham Robinson دریافت که مفهومی وجود دارد که برنامه اولیه لایبنیتز می تواند به طور کامل منطقی بر مبنای آن صورت گیرد. اشارات و موارد استفاده از آنچه که امروزه آنالیز غیر استاندارد نام گرفته است بسیار فراتر است از استفاده خاص در حساب دیفرانسیل که مد نظر لایبنیتز بود.

[3] ملاصدرا در بیان اقسام بی نهایت و تفکیک بین بی نهایت بالقوه و بی نهایت بالفعل می فرماید:

و منها أن غير المتناهي على معنيين: أحدهما بالقوة و هو غير المتناهي اللايقفي

و ثانيهما بالفعل و هو غير المتناهي العددي، و مقدورات الله تعالى عند المتكلمين غير متناهية بالمعنى الأول لا بالمعنى الثاني لأنهم منكرون لوجود الغير المتناهي بالفعل مرتبا كان أو غير مرتب متعاقبا كان أو مجتمعا و التفاوت إنما يجوز في غير المتناهي بالمعنى الأول كقبول الجسم عند الحكماء للأنصاف المتداخلة غير المتناهية و الأرباع المتداخلة غير المتناهية و الثانية نصف الأولى.(الحکمة المتعالیة، ج ۷، ص ۳۱۸)

شهید مطهری بی نهایت بالقوه را این گونه تبیین می کند:

اعداد متناهي نيستند؛ يعني اگر اعداد را بيان كرده و بالا برويم و بگوييم ۱، ۲، ۳،...، ۱۰۰۰،...، ۱۰۰۰۰۰۰،... هر چه بالا برويم به عددي كه ما فوق آن نتوان عددي را فرض كرد نمي‌رسيم. هر عددي را كه ما فرض كنيم باز هم ما فوق آن عددي فرض مي‌شود، بلكه باراي آن عدد دو برابر هم فرض مي‌شود، بلكه خودش ضرب در خودش هم فرض مي‌شود، خود آن به قو ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و... هم فرض مي‌شود. هر عددي ر كه شما اعتبار كنيد و بگوييد اين آخرين عدد است باز هم بالاتر از آن عدد است. اين است كه مي‌گويند اعداد غير متناهي است.

اما **اينكه مي‌گويند اعداد غير متناهي است، منظور غير متناهي بالفعل نيست، بلكه منظور «غير متناهي لا يقفي» است**. لايتناهي بالفعل يعني اينكه ما يك موجود بالفعل غير متناهي داشته باشيم، مثل اينكه كسي بگويد ستاره‌هاي عالم بالفعل غير متناهي‌اند، ذرات عالم بالفعل غير متناهي‌اند؛ كه اگر كسي گفت ستاره‌ها بالفعل غير متناهي است، بايد بگوييم ما الآن غير متناهي عدد ستاره در خارج داريم. اين يك مسأله است. اما آنكه مي‌گويد عدد غير متناهي است، به اين معنا نمي‌گويد. منظور غير متناهي لا يقفي است. غير متناهي لا يقفي به ذهن ما برمي‌گردد، به خارج مربوط نيست؛ يعني ذهن ما هر عددي را كه اعتبار كند عدد در آنجا متوقف نمي‌گردد؛ امكان اعتبار عددي ديگر كه يكي بيشتر يا دوتا بيشتر يا دو برابر آن يا هزار برابر آن باشد هست. اين را مي‌گويند «لا يتناهي لا يقفي». شيخ همين جا اشكال خود را وارد مي‌كند.(مجموعه آثار شهید مطهری، ج ۷، ص ۵۶۷-۵۶۸)

تناهي به دو معناست: يكي تناهي عددي، و ديگر تناهي لا يقفي.

نامتناهي عددي آن است كه شيء بالفعل موجود و نامتناهي باشد، مثلا خط و سطح و جسم بالفعل موجود باشد و نهايت نداشته باشد. و نامتناهي لا يقفي آن است كه بالفعل موجود نباشد، بلكه به هر مرتبه كه رسد باز در آن چيزي بتوان فرض نمود.چنانچه حكما گويند كه جسم قابل قسمت است الى غير النهاية، كه هر اندازه جسم را تقسيم كنيم باز هم قابل قسمت است و به انتهاء نمي‌رسد. و اينكه حكما گويند نامتناهي وجود ندارد مقصود نامتناهي عددي است، ولي نامتناهي لايقفي جائز و واقع است، مثل اينكه جسم به نامتناهي تقسيم مي‌شود و اين

قسمتها به جایی نمی‌رسند که دیگر تقسیم نشوند. حکمای قدیم یونان می‌گفتند ابعاد نامتناهی است.(مجموعه رسائل عرفانی و فلسفی،ص ۲۶۹)

این اصطلاح اولین بار در کلام ارسطو به کار رفته است. او در این باره می گوید:

قال الإسكندر: هل المتحرك على عظم ما يتحرك في أول حركته على أول جزء منه، أم لا؟ و ذلك أن كل حركة إنما صارت في زمان لأنه ليس يمكن أن يتحرك المتحرك على الشيء الموضوع ليتحرك عليه دفعة، لكنه يقطع منه شيئا بعد شيء؛ فإذا هذا هكذا، فالمتحرك يتحرك أول على أول جزء من أجزاء العظم الذي يتحرك عليه. فإن كان الأول في العظم يمر بالنهاية، فكل محرك يصير متحركا على أشياء بالنهاية؛ و كل متحرك يتحرك بعد ما، فإنه يكون متحركا آخرا بالنهاية أولية. و الأشياء التي بالنهاية لا تقطع مسافتها، فنقول: إنه لا بد - إذ كانت قسمة الأشياء المتصلة بالنهاية - من أحد أمرين: إما أن تكون الحركة لا توجد على الجزء الأول، أو تكون قد توجد على الجزء الأول من العظم إنما هو من قبل أن في العظم المتصل جزءا يتقدم و جزءا يتأخر. و ذلك أنه ليس الأجزاء في المتصل بحال غير الحال التي نقول بها إن المتحرك نفسه يقطعها؛ فكيف إذا يوجد بعض الأجزاء متقدما و بعضها متأخرا في المتصل، إما بالفعل أم بغير الفعل؟ فنقول: إنه ليس شيء من الأعظام المتصلة أجزاؤه منفصلة، و لا هي في الكل بالفعل، لأن العظم إنما هو غير منقسم بالفعل؛ و لو كان منقسما بالفعل، لما كانت الحركة واحدة. فإذا كانت الأجزاء التي في الكل ليست بالفعل فيه **فقد بقي أن يكون في الكل الذي هو متصل بالقوة، و يكون المتقدم و المتأخر المتصل إنما هو بالقوة لا بالفعل، و يكون المتحرك عليه إنما يتحرك على الجزء الأول أول على الحال التي يوجد بها الجزء في العظم، و وجوده فيه بالقوة.** فعلى هذه الجهة إذا يتحرك عليه. و إنما يفعل هذا من قبل أنه يتحرك عليه من غير أن يقسمه و من غير أن يجعل جزءا منه أول و جزءا ثانيا بالفعل. و المتحرك إذا تحرك على هذه الجهة على العظم فإنما يكون متحركا في الأجزاء الأوائل على حسب ما هي في العظم بالنهاية، و **وجودها في العظم بالنهاية إنما هو بالقوة**. و معنى قولنا: إنه غير متناهية القوة، لا تقطع مسافتها؛ بل إنما وضعنا ذلك فيما كان بالفعل.(أرسطو عند العرب، صفحه: ۲۷۸)

او در جای دیگر در مورد بی نهایت های بزرگ(در اعداد) و کوچک(در مقادیر) چنین می نویسد:

لما الواجب أيضا لزم أن يكون غير المتناهي أمّا بالزيادة فقد يظن أنه لا يمكن أن يتجاوز كل مقدار، و أما بالقسمة فقد يمكن؛ و ذلك أن <غير المتناهي و> الهيولى محاط بها لخارج، و هي الشيء غير المتناهي و المحيط هو الصورة. و بالواجب أيضا صار في **العدد** في الذاهب إلى القلة نهاية، و **إلى الكثرة يزيد أبدا على كل عدة**. و صار في **المقدار** الأمر بالضد: أما **في الذاهب إلى الصغر فقد يتجاوز كل مقدار**، و أما إلى الكبر فلا يمكن أن يوجد مقدار غير متناه. و السبب في ذلك أن الواحد غير منقسم - أيّ واحد كان - مثل الإنسان إنه إنسان واحد لا كثير، و **العدد إنما هو** آحاد كثيرة و كمية ما. فقد يجب أن نقف عند ما لا ينقسم، فإن الاثنين و الثلاثة إنما هي أسماء، و كذلك واحد من سائر الأعداد. **فإن أما ذاهبة إلى الكثرة فقد يمكن توهمه دائما**. **و** قسمة المقدار بنصفين، و نصفه بنصفين يمر بالنهاية، فيكون <العدد غير متناه> بالقوة ؛ **فأما بالفعل - فلا**. غير أنه قد يوجد منه ما يزيد دائما على كل عدة محددة، لكنه هذا العدد ليس بمفارق لهذه القسمة، و لا بالنهاية أمر باق، لكنه أمر يتكون دائما، و كذلك الزمان و عدد الزمان.

فأما المقادير فإن الأمر فيها بالضد، و ذلك أن المتصل قد ينقسم بالنهاية؛ غير أنه في العظم ليس يكون غير متناه. لأنه بأيّ مقدار كان يمكن أن يكون بالقوة، فإنه بذلك المقدار يمكن أن يكون بالفعل. فإذ ليس يوجد أصلا مقدار محسوس غير متناه، فليس يمكن أن يكون يفضل على كل مقدار محدود، لأن ذلك لو جاز لقد كان سيكون ما هو أعظم من السماء.(الطبيعة (أرسطو)، جلد: ۱، صفحه: ۲۶۳)

در کلمات ساری‌ین:

و الجواب: أنّ ال نهاية إمكان القسمة خاصّة للأجسام كلّها. و كما ال يلزم من اشتراك الكلّ و الجزء في الجسميّة اشتراكهما في خصوص المقدار، كذلك ال يلزم من اشتراكهما في خاصّة الجسم، و هي ال نهاية إمكان القسمة، اشتراكهما في خصوص المقدار. سلّمنا أنّ الشيئين إذا اشتركا في عدم التناهي اشتركا في عدم التفاوت، و لكن ال مطلقا، بل **فيما يكون أعدادهما الغير المتناهية حاصلة بالفعل. أمّا إذا كانت بالقوّة فلا**، كيف و الوجود يكذّبه.

أ لا ترى أنّ الأولى المتصاعفة إلى غير النهاية بالقوّة و الإمكان فيها من المئات الغير المتناهية بالقوّة عشرة أمثالها، و من العشرات مائة أمثالها، مع أنّ عدد كلّ واحد من الثلاثة غير متناه بالقوّة؛ بمعنى أنّا إلى أيّ حدّ انتهينا في العدد أمكن الزيادة عليه؛ لكن لمّا لم تكن هذه الأولى الغير المتناهية حاصلة بالفعل، لم يلزم من الاشتراك في اللانّهاية التساوي في الأعداد(حكمة الإشراق (تعليقه م الا صدرا)، جلد: ۱، صفحه: ۳۲۲)

السادس أن العدد ليس بمتناه و معناه أنه ال توجد مرتبة من العدد إلا و يمكن فرض ما يزيد عليها و كذا فرض ما يزيد على الزائد و ال تقف السلسلة حتى تنقطع بانقطاع الاعتبار و يسمى غير المتناهي اللايقفي و ال يوجد من السلسلة دائما بالفعل إلا مقدار متناه و ما يزيد عليه فهو في القوة و أما ذهاب السلسلة بالفعل إلى غير النهاية على نحو العدول دون السلب التحصيلي فغير معقول فالكل و ال مجموع لغير المتناهي بهذا المعنى و ال تحقق فيه لشيء من النسب الكسرية كالنصف و الثلث و الربع و إلى عاد متناهيا. (نهاية الحكمة، ص ۱۱۲-۱۱۳)

[4] آنالیز، آنالس به انگلیسی: (Analysis)، واکافت، واکاوی ای تجزیه و تحلیل شکستن یک مجموعه به بخش‌های کوچک برای فهم بهتر آن است. به عبارت دیگر، آنالیز، تجزیه و تحلیل داده‌ها برای گرفتن نتیجه‌ٔ پیچیده‌تر نیز می‌تواند باشد.

در دانش شیمی، آنالیز به تجزیه نمونه و بررسی آن اطلاق می‌شود که در شاخه شیمی تجزیه دنبال می‌گردد. در دانش ریاضیات و آمار، آنالیز به بررسی احتمالات و ریزحالت‌ها می‌پردازد.(سایت ویکی پدیا، مدخل آنالیز)

آنالیز ریاضی بخشی از ریاضیات است که با مفاهیم حد و همگرایی سروکار دارد و در آن موضوعاتی مثل پیوستگی و انتگرالگیری و مشتق‌پذیری و توابع غیرجبری بررسی می‌شود. این موضوعات را معمولاً در عرصه‌ٔ اعداد حقیقی یا اعداد مختلط و توابع مربوط به آن‌ها بحث می‌کنند ولی می‌توان آن‌ها را در هر فضائی از موجودات ریاضی که در آن مفهوم «نزدیکی» (فضای توپولوژیک) یا «فاصله» (فضای متریک) وجود دارد به کار برد. آنالیز ریاضی از کوشش‌های مربوط به دقیق کردن مبانی و تعریف‌های حسابان سر برآورده است.

آنالیز ریاضی دارای چندین زیرشاخه به این شرح است:

آنالیز حقیقی

آنالیز مختلط

آنالیز عددی

آنالیز تابعی

آنالیز هارمونیک

آنالیز غیراستاندارد (سایت ویکی پدیا، مدخل آنالیز ریاضی)

آنالیز شاخه ای از ریاضیات است که با اعداد حقیقی و اعداد مختلط و نیز توابع حقیقی و مختلط سر و کار دارد و به بررسی مفاهیمی از قبیل پیوستگی، انتگرال گیری و مشق پذیری می پردازد. از نظر تاریخی آنالیز در قرن هفدهم با ابداع حساب دیفرانسیل و انتگرال توسط نیوتن و لایپ نیتس پایه ریزی شد. در قرن هفدهم و هجدهم سر فصل های آنالیزی از قبیل حساب تغییرات، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، آنالیز فوریه در زمینه های کاربردی توسعه فراوانی یافتند و از آنها به طور موفقیت آمیز در زمینه های صنعتی استفاده شد. در قرن هجدهم تعریف مفهوم تابع به یک موضوع بحث بر انگیز در ریاضیات تبدیل شد.

در قرن نوزدهم کوشی با معرفی مفهوم سری های کوشی اولین کسی بود که حساب دیفرانسیل و انتگرال را بر یک پایه منطقی استوار کرد. در اواسط قرن نوزدهم ریمان تئوری انتگرال گیری خود را که به انتگرال ریمان معروف است ارائه داد، در اواخر قرن نوزدهم واریشتراس مفهوم حد را معرفی کرد و نتایج کار خود بر روی سریها را نیز ارائه داد، در همین دوران ریاضیدانان با تلاش های زیاد توانستند انتگرال ریمان را اصلاح نمایند.

در اوایل قرن بیستم هیلبرت برای حل معادلات انتگرال فضای هیلبرتی را تعریف و معرفی نمود. از آخرین تحولات در زمینه آنالیز می توان به پایه گذاری آنالیز تابعی توسط یک دانشمند لهستانی به نام بانچ نام برد .

آنالیز به دسته های زیر تقسیم بندی می شود :

آنالیز حقیقی: به مطالعه بر روی حد ها، مشتقات، انتگرال ها سریهای توانی می پردازد

آنالیز تابعی: به معرفی نظریه هایی از قبیل فضاهای بانچ و نیز فضای هیلبرت می پردازد

آنالیز هارمونیک: در این شاخه از آنالیز سری های فوریه مورد مطالعه قرار می گیرد

آنالیز مختلط: به بررسی توابع مختلط و خواص این توابع از قبیل مشتق پذیری و انتگرال گیری می پردازد

آنالیز عددی: آنالیز عددی الگوریتم حل مسئله در ریاضیات پیوسته(ریاضیاتی که جدا از ریاضیات گسسته است) را مورد مطالعه قرار میدهد.

آنالیز عددی اساسا به مسائل مربوط به متغیرهای حقیقی و متغیرهای مختلط و نیز جبر خطی عددی به علاوه حل معادلات دیفرانسیل و دیگر مسائلی که از فیزیک و مهندسی مشتق میشود. تعدادی از مسائل در ریاضیات پیوسته دقیقا با یک الگوریتم حل میشوند. که به روش های مستقیم حل مسئله معروف اند. برای مثال روش حذف گائوسی برای حل دستگاه معادلات خطی است و نیز روش سیمپلکس در برنامه ریزی خطی مورد استفاده قرار میگیرد. ولی روش مستقیم برای حل خیلی از مسائل وجود ندارد و ممکن است از روشهای دیگر مانند روش تکرارشونده استفاده شود، چون این روش میتواند در یافتن جواب مسئله موثرتر باشد.

تخمین خطاهای موجود در حل مسائل از مهمترین قسمت های آنالیز عددی است این خطاها در روش های تکرار شونده وجود دارد چون به هرحال جوابهای تقریبی بدست آمده با جواب دقیق مسئله، اختلاف دارد و ای وقتی که از روش های مستقیم برای حل مسئله استفاده می شود خطاهایی ناشی از گرد کردن اعداد بوجود می آید. در آنالیز عددی می توان مقدار خطا را در خور روش که برای حل مسئله به کار می رود، تخمین زد. الگوریتم های موجود در آنالیز عددی برای حل بسیاری از مسائل موجود در علوم پایه و رشته های مهندسی مورد استفاده قرار می گیرند. برای مثال از این الگوریتم ها در طراحی بناهایی مانند پل ها، در طراحی هواپیما ، در پیش بینی آب و هوا، تهیه نقشه های جوی از زمین، تجزیه و تحلیل ساختار مولکول ها، پیدا کردن مخازن نفت، استفاده می شود، همچنین اکثر ابر رایانه ها به طور مداوم بر اساس الگوریتم های آنالیز عددی برنامه ریزی می شوند. به طور کلی آنالیز عددی از نتایج عملی حاصل از اجرای محاسبات برای پیدا کردن روش های جدید برای تجزیه و تحلیل مسائل، استفاده میکند.(وبلاگ ریاضی ریاضی است، مقاله آنالیز ریاضی)

بازبینی #1
ایجاد شده 27 مارس 2025 14:41:53 توسط ... .
به روزرسانی شده 27 مارس 2025 14:44:22 توسط ... .