فصل پنجم: عدد پی؛ ابزار ارائه مجرّدات

آیا وقتی شما می‌گویید یک دایره محیطش با قطرش، نسبتی دارد، واقعاً این شکل(شکل دایره که یک خط است و این نقطه مرکزش است) چه کسی است که آن را به وضوح درک نکند؟ همه می‌فهمیم شکل چیست؛ درک روشنی از آن داریم.

سؤال این است:

سؤال: عدد پی؛ نسبتِ کدام دایره؟

- وقتی می‌گوییم نسبتِ دایره به قطر، منظور ما از این دایره، کدام دایره است؟ دایره‌ای است که فقط در ذهن شماست یا در ذهن من است؟ دایره‌ای که در دفترِ شما کشیدن یا دایره‌ای که در دفترِ من کشیدن؟ کدام دایره؟ همه‌ی این ها روی هم؟

یعنی اگر هر چه دایره‌ی کشیده هست یا ذهن‌های همه بشر یک دفعه محو بشوند، نسبت محیط دایره به قطرش تمام می‌شود؟ اینکه محیط دایره سه برابر قطرش است، این نسبت دیگر نیست؟ محو می‌شود؟ یا نه؛ ذهن و عقل ما این نسبت را درک می‌کند.

اگر هیچ انسانی نباشد، ولی یک شیئ تیزی بیاید و یک سنگی را که به صورت گردی هست ببرد، مقطع این سنگِ گردِ توپمانند، دایره نیست؟ دایره‌ی مادّی. اتصاف او به این گرد بودن به ذهن ما ربطی دارد؟

وقتی شما یک توپ را نصف می‌کنید، نصف شدن توپ، بند به ذهن شما نیست. و حدوث مقطع یک توپ به عنوان سطحِ دایره، باز به ذهن شما مربوط نیست. یعنی شما می‌توانید دایره‌ای در بطن داده پیدا کنید.الان من چیزی را **درک** می‌کنم گرد است یا من به آن **می‌گویم** گرد است؟ اگر گفتن است ،بگویید مربع است؛ یک اقوامی بگویند این چهارگوش است، یک اقوامی بگویند گرد است.

مفهومِ طول؛ چند متر؟

شما می‌گویید: محیط، قطر، دایره، طول، فاصله، بُعد. وقتی طول می‌گویید، همه می‌فهمند: طول یک متری، یک سانتی‌متری، یا بُعد: بُعد ۲ سانتی مثلاً.

وقتی می‌گویید **طول**، آیا مفهوم طول،هم طول دارد یا ندارد؟ چند متر است؟ طول، دیگر معنایش طول ندارد، اما مصداقش چرا، طول دارد.

ابتدا و انتهای مفهوم فاصله؟

فاصله؛ هر فاصله‌ای بین‌ش دو نقطه است. هر فاصله‌ای اوّل دارد، آخر دارد، دو طرف دارد. آیا مفهوم فاصله هم دو طرف دارد یا ندارد؟ مفهومِ فاصله، دو تا لبه ندارد؛ مصداقش است که دو تا لبه دارد. مفهوم فاصله، در آن فاصله نیست. این‌ها مفاهیم‌اند.

شعاع داریه؛ مفهوم فاصله یا مصداق فاصله؟

وقتی شما می‌گویید که فاصله‌ی بین مرکز داریه با محیط داریه، شعاع داریه است. الآن آیا این فاصله‌ای که شما به کار بردید، مفهومِ فاصله است یا مصداق آن است؟ این فاصله، مفهوم نیست؛ چون اوّل و آخر آن، دو تا نقطه است-از مرکز تا محیط داریه-واقعاً بین این دو، فاصله‌ی خارجی مصداقی است. اما اگر مصداق است پس چرا تعیّن ندارد؟ شما مفهوم کلی فاصله را طوری در نظر گرفتید که با افراد مختلف، صدق کند.

پاسخ: عدد پی؛ نسبت سنجی در کلّی داریه

قطر، **محیط**، دو تا مفهوم‌اند. نسبت بین این دو تا مفهوم از نسب اربعه چیست؟ تباین است؛ هیچ قطری محیط نیست و هیچ محیطی هم قطر نیست. این از حیث مفهوم، روشن است. دوباره شما می‌گویید نه. من که می‌گویم نسبت بین محیط با قطر، مقصودم بین دو تا مفهوم از حیث مصادیقشان نیست که می‌گویید متباینان؛ من در **یک** داریه، نسبت سنجی می کنم. همین جا آیا باید داریه‌ی مشخصی باشد تا نسبت برقرار بشود؟ ای نه؛ در کلّیِ داریه بین محیط با قطر، نسبت برقرار می‌شود. کلّی به کلّی.

سؤال: عدد پیِ کلّی؛ دارای شکل؟

سؤال ما دقیق این است:

الآن که نسبت بین محیط با قطر کلی است، این قطر، این محیط و این نسبت این دو، به همین نحوی که الآن برقرار است، دارای شکل هستند یا نیستند؟ آن‌هایی که طرف نسبتاند، آن‌ها شکل دارند یا ندارند؟ اگر شکل دارند، مقدار باید داشته باشند. مقدارشان چه اندازه است؟ نامتعین است؟چطور شما یک شکلی دارید که اندازه‌اش نامتعین است. مگر ما شکل کلی هم داریم؟

الف) پاسخ ابتدایی: مراتب شکل

۱. شکل عقلانی: مفهوم بدون شکل

اصلاً شکل یک مفهوم عقلانی دارد. شکل، شکل ندارد. شکل، یک مفهوم کلی است.

۲. شکل مثالی منفصل: بدون تعیّن

اما مصداقش، یک داریه می‌شود. داریه، یک شکل است به حمل شایع. تفاوت این دو تا چیست؟ تفاوتش این است که شکل داریه به عنوان یک شکل، از عالم مثال منفصل است و لذا بین الاذهان است؛ همه‌ی اذهان با هم در یک عالمی می‌روند که در منظر همه بشر است و آن را می‌بینند. آن عالم کجاست؟ مثال منفصل؛ مجرّد است به تجرد برزخی، آثار ماده را دارد ولی خود ماده را ندارد.

داریه ۲ متری، به ذهن شما بد است. داریه ۳ متری هم به ذهن دیگری بد است. اما شکل داریه -نه کلّیِ شکل که عقلانی است- شعاعش چقدر است؟ شکل داریه، قطرش چند متر است؟ اتفاقاً آن

هایی که هندسه درس میدهند میگویند دایرهای با قطر واحد، یا دایرهای با شعاع واحد. پس در علم هندسه به راحتی شکل دایره را درک میکنند. شکل هست، ولی تعیّن ِمقدار ِخاصّی از شعاع و قطر ندارد.

۳. شکل مثالی متصل: متعیّن

به محض اینکه یک دایره را شعاع مِتریک به آن بدهید، بگویید ۲ متر، ۳ متر، متشخّص شد؛ شد یک فرد دایرهای که در قوه ی خیال ِمتصل موجود است. یعنی ذهن شما یک شعاع خاصی را به آن داد، حالا شد خیال متّصل.

پس شکل ِدایره، شکل ِمربع، یک طبیعی است که خودش را در ضمن کم ّمتصل قرار ّدر عالم ِمثال منفصل به ذهن ما نشان میدهد. اما ما چون الآن داریم او را به راحتی میبینیم، مثل بچهای هستیم که هنوز تشخیص نمیدهیم که آن شکل منفصل برای عالم مثال منفصل، با آن شکل برای مثال متصل که تصور میکنم تفاوت دارد.

-[illegible][1][illegible]

اینجاست که قدر این روایت را میدانید؛ خود عالم مثال، ۱۸۰۰۰ عالم است[2]. ما هنوز می خواهیم با یک زحمتی دوتایی ش را تفکیک کنیم. ۱۸۰۰۰ عالم است. عوالم با هم فرق دارند.

من نمیخواهم چیزی را ثابت کنم. میخواهیم آن چیزی که همه داریم ببینیمش. ما وقتی در هندسه میگوییم نسبت محیط به قطر، محیط قطعاً کم است، خط است، طول است. اما چند متر؟ طولی است که متر فیزیکی ندارد. نمیخواهیم بگوییم چند متر است. قطعاً طول است، قطعاً تجرد تام نیست. چرا؟ چون طول شکل دارد و در قوه خیال ظاهر میشود. شکل دایره در قوه خیال حاضر میشود. اما این شکل دایرهای که احضارش میکنید، شما با عقلتان در مثال منفصل شکل دایره را میبینید. چند متر است؟ مثال منفصل، متر نمیخواهد. طول میخواهد، خط منحنی میخواهد، اما اندازه نمیخواهد. وقتی به عالم فیزیکی میآید اندازه میخواهد.

اشکال: ابهام در عالم مثال؟

ما طول مبهم داریم یا نداریم؟ اینکه همین ابهام سبب بشود برای نفی چنین صورتی در عالم مثال منفصل و ما بگوییم قطعاً این طول در عالم ِمثال ِمنفصل نیست، این ملازمه و سببیّت برقرار نیست.

به خاطر اینکه عوالمی در مثال منفصل هست-اینطور که گفته اند و مدعی شده اند- که آن تفرّد فیزیکی ِخارجی را خیلی نیاز ندارد. ایادم میآید مرحوم میرزا جواد آقا ملکی تبریزی فرموده بودند که به یک میوه وقتی در عالم مثال نگاه میکنید، میوه در عین حال که سیب است، در همان حال پرتقال است. این برای ذهن ما الآن سنگین است.[3]روایت هم دارد. ذیل بحث میوه ممنوعهای که حضرت آدم(علیه السلام) خورده است، بعضی میگویند خرما است، بعضی میگویند گندم است، انگور است حضرت فرمودند که همه این ها هست[4].

خلاصه نمیشود احکام ِاینجا را بر آن ها جاری کرد. یک میوه را وقتی نگاهش میکنند، هم سیب است هم پرتقال است. ما الآن میگوییم معقول نیست؛ تناقض میشود؛ اجتماع ضدین میشود.این را فقط اشاره مطرح کردم که اینطور ادّعا و نظر هست که عالم منفصلی از مثال داریم که خیلی احکامی که اینجا داریم، لازم نیست آنجا باشد. و لذا دایرهای که طولش مبهم است، در آنجا یک امر

محالی نیست، ولی در عین حال شکل است، طول دارد؛ خواص ماده را دارد، ولی مادّیت مادّه را ندارد.

ب) پاسخ نهایی: بررسی یک احتمال

مثالهای ما این را واضح کرده که شکل داره، حتما ًیک واقعیت منفصلی دارد، ولی این واقعیت منفصل تجرّد برزخی دارد؟ یعنی آثار ماده از شکل و طول و عرض و رنگ دارد که مثال منفصل بشود؟ یا نه، آن واقعیتی که دارد از سنخ معناست؛ از سنخ معنایی که به قوه خیال ما این طول و عرض و خواص مادّه را دستور میدهد.

عدد پی کلّی؛ معقول منفصل

تأمل کردم، دیدم احتمال قویای است- نمیشود از کنارش رد شد-که این شکل به عنوان یک موجود نفسی در ذهن ما اصال ًمعنا نداشته باشد. یعنی ذهن ِمن و شما همه ،یک معانی ای مرکب که همهاش

از سنخ طبایع است، به عنوان فرمولی از معنا دارد که تا میگوییدی: «علامت جمع[5]»، فوری در قوّه-ی خیالتان، یک علامت جمع ترسیم میکنند. راسمَش، یک معنایی است که عقلتان درک کرده است. اگر آن معنای درکی را نداشتید، قوّه خیال شما، قوّهی این که آن را ترسیم کند نداشت.

عکس های اس وی جی (SVG)

عکسهایی هست که همه در موبایلهایتان دارید؛ از سنخ اس وی جی(SVG) [6]. اگر کد این ها را ببینید، جز چند تا فرمول هیچ چیز دیگری نیست، صفحهی مانیتور موبایلتان یا کامپیوترتان را تقسیمبندی کردید، با فرمول به آن میگوییدی این طور در مانیتور، عکس بکش، از اینجا به آنجا بکش. یک تصویری در میآید. ذهن ِما در خزانهی معانی خودش، یک فرمول معنایی دارد، حتّی بچهای که در ذهنش، مثلّث میکشد، آن معناست که به او اجازه میدهد که بتواند در ذهنش یک مثلث رسم کند.

مثالهایش را هم شما شبیه این دستگاه های امروزی ببینید، آن که در دل ِحافظهی کامپیوتر و موبایل است، نقش نیست، در دل آن، هرگز علامت جمع نیست، اما یک فرمولی، یک نظمی در دل حافظهی او هست که نرم افزار وقتی به آن فرمول نگاه میکند، به صفحه نمایش دستور میدهد این علامت جمع را وضع کن. از نقطهی فلان بکش به نقطه دیگر؛نگاشت ریاضی.

نگاشت

لفظ نگاشت دو جا به کار میرود:

لفظ نگاشت در فضای ریاضیات؛ تابع ِحوزه و دامنه[7].

نگاشت یعنی تصویر به تصویر؛مثل نقشهی ایران کشیدن.

این مفهوم دوم را نمیشود اینجا بگویند.مقصود ما در اینجا، نگاشت ریاضی[8] است. مثل این که دستگاه شما آن چیزی که دارید در مانیتورش میبینید، فرق دارد با این دستگاهی که دیگری دارد در مانیتورش میبینند. گرچه آن مطلبی که در حافظه دستگاه شماست، یکی است، ولی مانیتورها دو تاست، یعنی دستوری که دستگاه شما میدهد که نگاشت کن، در مانیتور با آن فرق میکند.

جمع بندی

با این حساب، برهان ما عملاً اثبات نکرده که یک نقش منفصل داریم که آن را از مثال منفصل، احضار کنند و به چنگ بیاورند.

عدد پی؛ ابزار ارائه معنای منفصل

ما آن را که به وضوح داریم، یک **معنای منفصل**[9] است از آن نقش. این معنا را من و شما، همه داریم. به محض اینکه به آن معنا توجه میکنیم، آن معنا در صحنه ذهن من و شما که به منزله مانیتور است، فوری میگوید یک بستر فراهم کن، رزولوشن درست کن، پیکسلهایش را بگذار، در آن پیکسلها این ها را حذف کن. یعنی خود معنا این دستور را میدهد.

سؤالات ما عملاً یک واقعیت این چنینی را بهطور واضح، منفصل میکند. برایش اثبات میکند که شکی در آن نیست.منفصل یعنی اگر ما هم نبودیم، بود. انسان نبود، ذهن او هم نبود، این چنین بود. تمام کسانی که با مفاهیم هندسی و ریاضی آشنایی مختصر داشته باشند، حرف های ما را **میبینند** که در خودشان اینها را دارند ؛ نه این که برایشان اثبات بشود، اما مثال منفصل را نه؛ هنوز تا این اندازه فاصله داریم که بتوانیم نشان بدهیم که ببین! ما یک نقش منفصل داریم که او را فراچنگ آوردیم، ولی ما به مقصودمان رسیدیم. چون برایمان کافی است که بگوییم پشتوانهی این نقش، یک معناست.

---

[1] سؤال یکی از دوستان حاضر در جلسه درس

[2] سئل أمير المؤمنين صلوات الله عليه عن قول الله عز و جل: و كذلك نري إبراهيم ملكوت السماوات و الأرض قال الأصبغ بن نباتة: كنت جالسا بين يديه مطرقا إلى الأرض، فرفع يده إلى فوق ثم قال لي صلى الله عليه: ارفع رأسك فطرقت رأسي، فرفعت رأسي، فرأيت السقف قد انفرج و رأيت نورا ساطعا إلى تحت العرش، فحار بصري فرددته، ثم قال لي صلى الله عليه: يا ابن نباتة، فرأى إبراهيم ملكوت السماوات و الأرض هكذا، ثم قال صلى الله عليه: أطرق رأسك فطرقت رأسي ثم قال: ارفع رأسك، فرفعت رأسي و إذا السقف بحاله.ثم أخذ بيدي فقام و أخرجني من البيت الذي كنا فيه فأدخلني ببيت آخر و خلع ثيابا كانت عليه و لبس ثيابا غيرها، ثم قال: لا تفتح عينك، فلبثت ساعة ثم قال عليه السلام: تدري أين أنت؟ قلت: لا يا مولاي، قال صلى الله عليه: أنت في الظلمة التي سلكها ذو القرنين.فقلت له: جعلت فداك، أ أتأذن لي حتى أفتح عيني؟فقال عليه السلام لي: افتح فإنك لا ترى شيئا، ففتحت عيني فإذا أنا في ظلمة لا أبصر فيها موضع قدمي، ثم سار قليلا و وقف و قال: أ تدري أين أنت؟ قلت: لا يا مولاي، قال عليه السلام: أنت واقف على عين الحياة التي شرب منها الخضر عليه السلام، و سرنا قليلا إلى عالم آخر فسلكنا فيها فرأيتها كهيئة عالمنا هذا في نباته و ساكنه و أهله، ثم خرجنا إلى عالم ثان حتى وردنا على خمس عوالم ثم قال صلوات الله عليه: هذه ملكوت الأرض كما ترى و **هي ثمانية عشر ألف عالم،** كل عالم كهيئة ما رأيت.ثم أخذ بيدي فإذا نحن بالبيت الذي خرجنا منه، و نزع تلك الثياب و لبس ثيابه التي كانت عليه، و عدنا إلى مجلسنا، فقلت له: جعلت فداك، كم مضى من النهار؟فقال: ثلاث ساعات (المناقب (للعلوي) / الكتاب العتيق، ص: 84-85)

[3] بعضی از خواص برای عالم مثال مطالبی بیان داشتهاند که برای اکثر مردم قابل قبول نیست، اینان برای گفتههای خود از اخبار و روایاتی که در حالات کاملین و صفات آنها رسیده

استشهاد نمودهاند از جمله اين فرمايش معصوم كه مىفرمايد: كلنا محمد. همه ما محمد هستيم و ي
كلنا واحد. همه ما يكى هستيم، اى آن راوى كه مىگويد بعضى از نهرهاى بهشتى مشروباتى دارد ك
طعم هر مطعوم و مشروبى در آن هست، اينان مىگويند اين بدان خاطر است كه هر موجودى از موجودات
آن عالم در برداردن همه خصوصيات موجودات ديگر آن عالم نيز هست، و لذا انسان در هر لحظهاى جمي
لذاتى كه در همه موجودات آن عالم وجود دارد با طعم مخصوص، و لذت خاص آنها، در هريك از آن موجودا
مىيابد بدون اينكه خصوصيتى از يكى از آنها از بين برود(اسرار الصلوه،١٣٠)

[4] قال الإمام أبو محمد العسكري (عليه السلام): ...فقال تعالى: و لا تقربا هذه الشجرة شجرة العلم، فإنها لمحمد و آله خاصة دون غيرهم، و لا يتناول منها بأمر الله إلا هم، و منها ما كان يتناوله النبي (صلى الله عليه و آله) و علي و فاطمة و الحسن و الحسين (عليهم السلام) بعد إطعامهم اليتيم و المسكين و الأسير، حتى لم يجوعوا بعد بجوع و لا عطش و لا تعب و لا نصب.و هي شجرة تميزت بين أشجار الجنة؛ إن سائر أشجار الجنة كان كل نوع منها يحمل نوعا من الثمار و المأكول، و كانت هذه الشجرة و جنسها تحمل البر و العنب و التين و العناب وسائر أنواع الثمار و الفواكه و الأطعمة، فلذلك اختلف الحاكون لذكرالشجرة، فقال بعضهم: هي برة، و قال آخرون: هي عنبة، و قال آخرون:هي تينة، و قال آخرون: هي عنابة. (البرهان في تفسير القرآن، ج1، ص: 178)

در كتاب الخاقب فى المناقب ابن حمزه طوسى نيز چنين آمده است: فبينا نحن وقوف، إذ نحن بغمامة قد أظلتنا ببرق و رعد حتى قربت منا، فألقت بين يدي رسول الله (ص) سفرة عليها رمان، لم تر العيون مثلها، على كل رمانة ثلاثة أقشار: قشر من اللؤلؤ، و قشر من الفضة، و قشر من الذهب.فقال (ص) لي: قل: بسم الله و كل اي علي، هذا أطيب من سفرتك. و كشفنا عن الرمان، فإذا في ثلاثة ألوان من الحب: حب كالياقوت الأحمر، و حب كاللؤلؤ الأبيض، و **حب كالزمرد الأخضر، فيه طعم كل شيء من اللذة** (الخاقب في المناقب، ص:٥٨- 59)

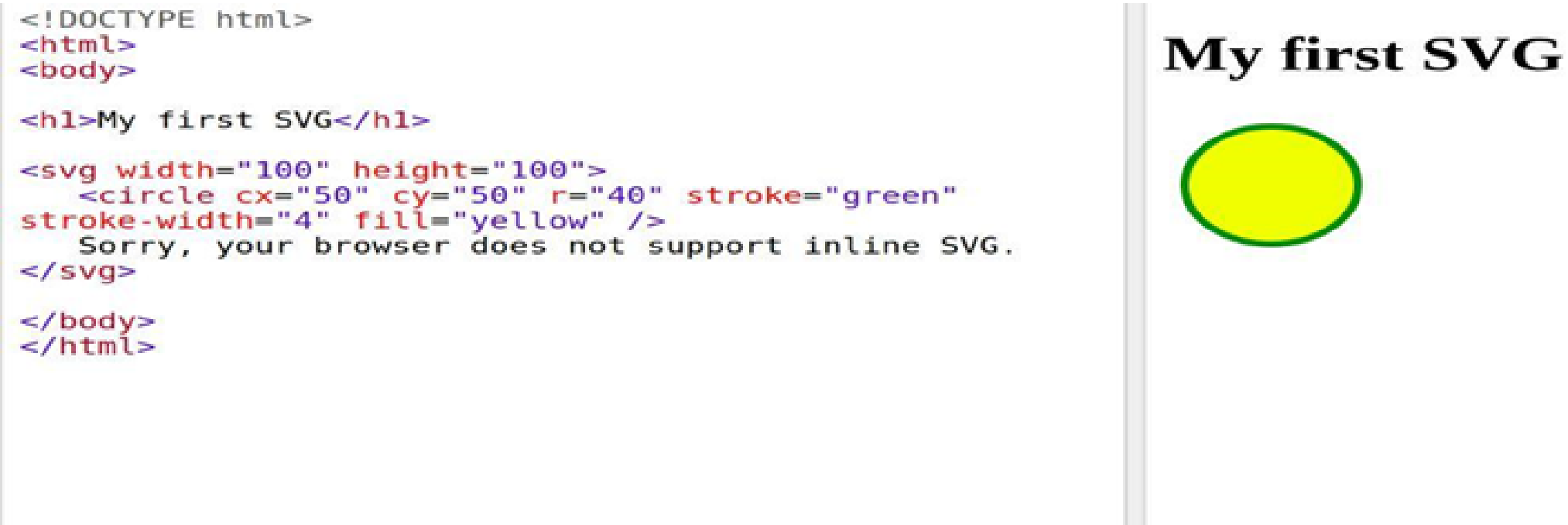
در كافى شريف نيز در وصف رسول مكرم اسلام چنين آمده است:له حوض أكبر من بكة إلى مطلع الشمس من رحيق مختوم فيه آنية مثل نجوم السماء و أكواب مثل مدر الأرض عذب فيه من كل شراب و طعم كل ثمار في الجنة (الكافي (ط - الإسلامية) ؛ ج8 ؛ ص139)

[5] بحث از علامت جمع و ابعاد مختلف آن در مقاله«مثال دقيق، سؤال رواني؛ ابزارى براى ارائه مجردات به همگان» قابل مشاهده است.

[6] در دنياى كامپيوتر دو نوع گرافيک براى عكس ها داريم : يكى Raster و ديگرى Vector .

درRaster Graphics كه به آن گرافيک شطرنجى هم گفته مى شود ، تصوير ها به صورت پيکسلى هستند ، طبيعتا هر كدام از اين پيکسل ها رنگ خاص خودشان را دارند و جداگانه ذخيره مىشوند . همه ى فرمت هاى bmp، jpg ، و gif از اين دسته هستند . ويژگى اين مدل تصاوير اين است كه با بزرگ تر شدنشان، كيفيتشان كمتر مىشود.

اما در Vector Graphics كه به آن گرافيک بُردارى مىگويند يک تصوير، مجموعه اى از نقطه ها ، خط ها ، منحنى ها و چندضلعى ها هست. اين نوع گرافيک با مختصات رياضى سروكار دارد. تصور كنيد يک محور x و y ترسيم شده و هركدام از اين بردار ها با متوجه به مختصاتى كه دارند ترسيم شدند و سرجاى خودشان قرار گرفتند (منظور از بردار صرفا يک خط راست نيست). در اين روش، به مرورگر دستور مىدهيم در فلان نقطه، فلان بردار را ترسيم كن . در اين مدل از تصاوير، كيفيت به اندازه وابسته نيست و به طور كلى مستقل از رزولوشن است .



اس وی جی مخفف عبارت *Scalable Vector Graphic* به معنای گرافیک برداری مقیاسپذیر است. نمونه یک تصویر SVG را در ادامه مشاهده می کنید.تصویر سمت چپ،نمونه دستور داده شده به رایانه و تصویر سمت راست،خروجی دستور به صورت تصویر است.(سایت ویرگول،مقاله اس وی جی چیه و چکار میکنه؟)


```
<!DOCTYPE html>
<html>
<body>

<h1>My first SVG</h1>

<svg width="100" height="100">
   <circle cx="50" cy="50" r="40" stroke="green"
stroke-width="4" fill="yellow" />
   Sorry, your browser does not support inline SVG.
</svg>

</body>
</html>
```

My first SVG

[7] به صورت ساده میتوان بیان کرد که دامنه یک تابع، شامل تمام مقادیری است که به عنوان ورودی به تابع داده میشوند و برد تابع نیز مجموعه مقادیر خروجی از تابع را در بر میگیرد.

اما مهمترین نکتهای که باید به آن توجه کنید این است که دامنه و برد، دو مفهوم اساسی در تعریف توابع هستند و با تغییر آنها تعریف تابع نیز تغییر میکند. در ادامه این مطلب از مجله فرادرس، این موضوع به صورت دقیق مورد بررسی قرار میگیرد و تعریف جامعی از دامنه، برد و همدامنه ارائه میشود.

همانطور که میدانید، یک تابع روی مجموعهای از ورودیها عمل میکند و مجموعهای از خروجیها را تولید میکند. بنابراین میتوان بیان کرد که هر تابع از یک سری ورودی و خروجی تشکیل شده است. برای آنکه مفهوم این موضوع را به صورت دقیق متوجه شوید، به مثال زیر توجه کنید.

مثال

درختی که در شکل زیر نشان داده شده است هر سال به اندازه ۲۰ سانتی متر رشد میکند.

بنابراین میتوان بیان کرد که ارتفاع درخت به میزان سن آن با استفاده از تابع h مرتبط است. این تابع را میتوان به شکل زیر نمایش داد.

$$h(\text{سن}) = \text{سن} \times 20$$

بنابراین در صورتی که سن درخت برابر با 10 سال باشد، ارتفاع آن مطابق با رابطه زیر، برابر با 200 سانتی متر خواهد بود.

$$h(10) = 200 \text{ cm}$$

رابطه فوق را میتوان اینگونه بیان کرد که تابع h، عدد 10 را به 200 تبدیل کرده است. بنابراین عدد 10 ورودی این تابع و 200 خروجی آن را نشان میدهد. این موضوع با استفاده از رابطه زیر نیز به خوبی نشان داده شده است.

$$10 \rightarrow 200$$

ورودی و خروجی یک تابع

نکته بسیار مهمی که باید به آن توجه کنید این است که، تمامی مقادیر و اعداد را نمی‌توان به عنوان ورودی به تابع معرفی کرد و اگر به تابع ورودی اشتباه بدهیم، ممکن است که تابع عمل نکند و هیچ خروجی را به ما تحویل ندهد.

دانستن اطلاعات کلی درمورد خروجی‌های تابع نیز امر بسیار مهمی است. برای مثال اگر بدانیم که این تابع تنها مقادیر مثبت را به عنوان خروجی به ما تحویل می‌دهد، درک مسئله برای ما بسیار ساده‌تر خواهد بود.

علاوه بر موارد ذکر شده، می‌توان بیان کرد که یک تابع، روی مجموعه‌های مشخصی عمل می‌کند. در ادامه برخی از این مجموعه‌ها را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

به عنوان مثال اول، مجموعه تمام اعداد زوج (مثبت و منفی) را می‌توان با استفاده از مجموعه اعداد زیر نمایش داد.

$$\{..., -4, -2, 0, 2, 4, ...\}$$

مشابه مثال بالا می‌توان مجموعه اعداد صحیح فرد را نیز به شکل زیر نمایش داد.

$$\{..., -3, -1, 1, 3, ...\}$$

در ادامه مجموعه‌های شامل تمام اعداد اول را مورد بررسی قرار می‌دهیم. توجه کنید که عدد اول، یک عدد طبیعی بزرگتر از یک است که به هیچ عددی به غیر از یک و خود آن عدد، بخش پذیر نیست. مجموعه این اعداد در رابطه زیر نشان داده شده است.

فیلم‌های آموزشی مرتبط

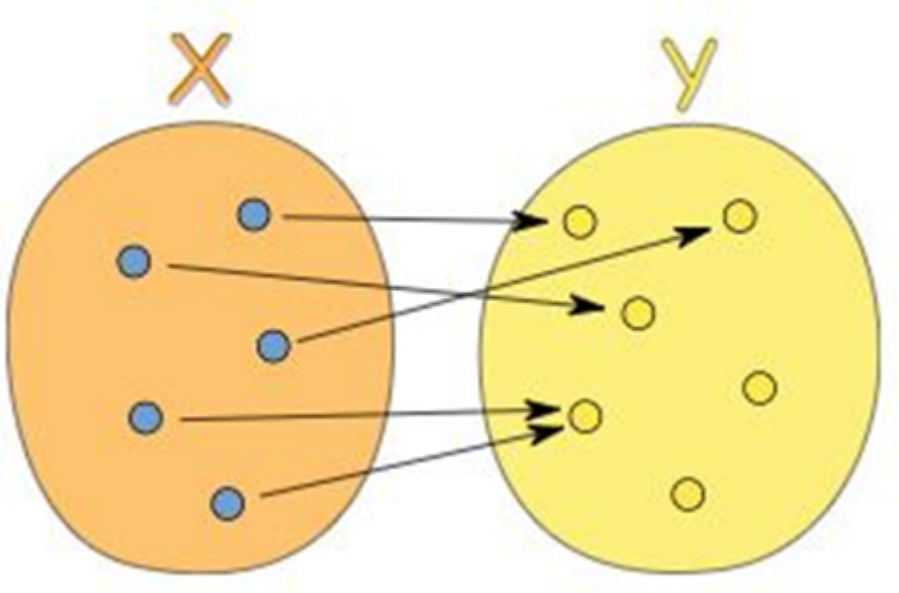
$$\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...\}$$

علاوه بر موارد ذکر شده، مجموعه‌ها را می‌توان به اعداد طبیعی، صحیح و گویا نیز محدود کرد. به غیر از مجموعه‌های کلی که در بالا اشاره شد، امکان دارد مجموعه‌های دلخواهی نیز در توابع به عنوان ورودی یا خروجی تعریف شوند. برای مثال ممکن است ورودی یک تابع تنها شامل اعداد مثبت کوچکتر از ۱۰ و مضرب ۳ باشد. این مجموعه دلخواه را به شکل زیر نمایش می‌دهند.

$$\{3, 6, 9\}$$

به صورت کلی می‌توان بیان کرد که یک تابع، هرکدام از اعضای یک مجموعه را دقیقا به یکی از اعضای مجموعه دیگر مرتبط می‌کند. توجه کنید که ممکن است دو مقدار از مجموعه اول (دامنه) به یک مقدار از مجموعه دوم (برد) منتقل شوند.

نکته مهم دیگر این است که اگر یک مقدار از مجموعه اول (دامنه) به دو مقدار از مجموعه دوم (برد)، مرتبط شود، با تعرف تابع در تضاد است و این عملگر را نمی‌توان تابع نامید. تعریف تابع و مجموعه دامنه و برد در شکل زیر به خوبی نشان داده شده است.



دامنه و برد چیست؟

دامنه یک تابع، مجموعه‌ای است که به عنوان ورودی تابع در نظر گرفته می‌شود و برد تابع، مجموعه‌ای است که تمامی خروجی‌های تابع را در بر می‌گیرد.

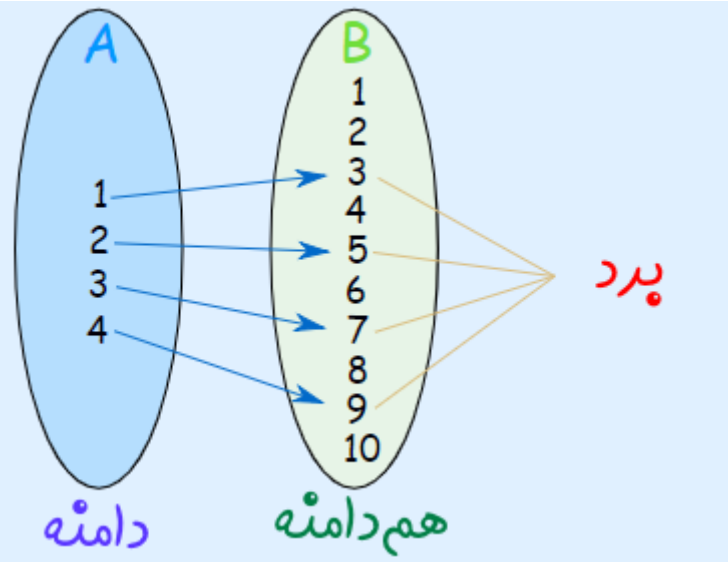
مجموعه دیگری نیز تحت عنوان همدامنه در تعریف تابع حضور دارد. همدامنه شامل مجموعه‌ای از اعداد است که خروجی تابع می‌تواند جزئی از آن‌ها باشد. همدامنه را دامنه مشترک نیز می‌نامند. برای مشخص شدن مفهوم این تعاریف به مثال زیر توجه کنید.

مثال

تابعی با رابطه زیر را در نظر بگیرید.

$$x \rightarrow 2x+1$$

این تابع مانند شکل زیر بین مجموعه‌های A و B عمل می‌کند و هر عضو مجموعه A را به یک عضو مجموعه B مرتبط می‌سازد.



شکل ۴: مفهوم دامنه، برد و همدامنه

بنابراین مجموعه A، دامنه تابع را نمایش می‌دهد و مجموعه B، همدامنه را مشخص می‌کند. توجه کنید که همدامنه را معمولا صورت مسئله تعیین می‌کند و برد، زیر مجموعه‌ای از این همدامنه است.

در این مثال، برد تابع، مجموعه‌ای است که اعداد 3، 5، 7 و 9 را شامل می‌شود. برد این تابع زیر مجموعه‌ای از همدامنه (مجموعه B) است. این سه مجموعه یعنی دامنه، همدامنه و برد را می‌توان به کمک مجموعه‌های زیر هم نمایش داد.

دامنه : {1, 2, 3, 4}
هم‌دامنه: {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}
برد : {3, 5, 7, 9}

اجزای مختلف یک تابع

در تعریف تابع، دامنه و برد نشان دادیم که آنچه که از تابع بیرون می‌آید (برد تابع) وابستگی مستقیم به ورودی تابع (دامنه تابع) دارد. بنابراین می‌توان بیان کرد که یکی از مهمترین بخش‌های تابع، دامنه آن است و تغییر دامنه باعث تغییر خروجی تابع و ویژگی‌های مختلف آن تابع می‌شود.

برای مشخص شدن مفهوم این قضیه به مثال زیر توجه کنید.

مثال

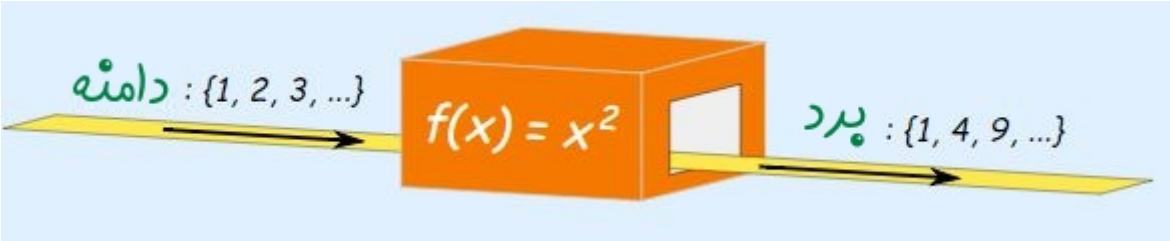
تابع ساده‌ای را که رابطه آن به فرم $f(x)=x2$

است را در نظر بگیرید. دامنه این تابع یعنی آنچه به عنوان ورودی به تابع داده می‌شود را می‌توانیم مجموعه‌ای شامل اعداد طبیعی به فرم $\{1,2,3,...\}$

تعریف کنیم. با استفاده از این دامنه و رابطه تابع، برد تابع به فرم مجموعه زیر در میآید.

$$\{1,4,9,...\}$$

این تابع با استفاده از دامنه و بردی که در بالا تعریف شد، به صورت زیر مشخص میشود.



شکل 5: مفهوم دامنه و برد تابع

حال تابع دیگری که رابطه مشابهی با تابع قبلی دارد را در نظر بگیرید. این تابع را با حرف g و با استفاده از رابطه $g(x)=x2$

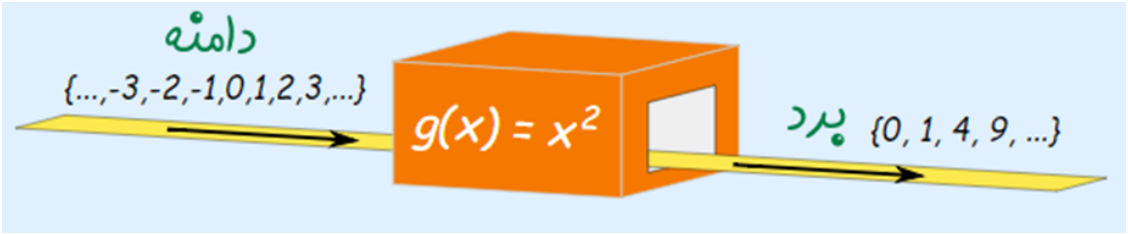
میتوان مشخص کرد. دامنه این تابع را به صورت مجموعه تمام اعداد صحیح به فرم زیر در نظر بگیرید.

$$\{...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...\}$$

در این شرایط، برد تابع به شکل زیر در میآید.

$$\{0,1,4,9,...\}$$

توجه کنید که برد تابع جدید نسبت به حالت قبل یک عدد صفر (0) بیشتر دارد. این تابع، دامنه و برد آن را میتوان به شکل زیر نمایش داد.



شکل 6: مفهوم دامنه و برد تابع

همانطور که مشاهده میشود، هر دو تابع مجذور ورودی را به عنوان خروجی تحویل میدهند ولی از آنجایی که این دو تابع ورودی و دامنه متفاوتی دارند، خروجی و برد آنها نیز متفاوت خواهد بود.

توجه کنید که خواص این دو تابع نیز متفاوت است. در حالت اول، تابع f، به صورت یک به یک است و به ازای هر ورودی یک خروجی را تولید میکند. این در حالی است که تابع g یک به یک نیست و به ازای دو ورودی مختلف، یک جواب یکسان را تولید میکند. این موضوع در دو رابطه زیر نشان داده

شده است.

$$g(-2)=4$$

$$g(2)=4$$

بنابراین با توجه به مثال و توضیحات بالا، می‌توان نتیجه گرفت که یکی از بخش‌های اساسی تابع، دامنه آن است. انواع مختلف دامنه می‌تواند ویژگی‌های گوناگون تابع را تحت تاثیر خود قرار دهد. (سایت فردرس، مقاله دامنه و برد تابع)

[8] ایده اصلی برای بهره‌گیری از رابطه بین متغیرها و تعریف تابع در قرن ۱۷ میلادی شکل گرفت و تحلیل خصوصیات توابع، باعث بوجود آمدن شاخه «حسابان» (Calculus) در ریاضیات شد. در آن زمان فقط «تابع حقیقی» (Real Function) یا توابع با متغیرهای «حقیقی مقدار» (Real Valued) مورد بحث واقع شده و فرض بر این بود که همه توابع «هموار» (Smooth) هستند. موضوعات مربوط به تابع و نگاشت همچنین دامنه و همدامنه، بعدها در قرن ۱۹ توسط ریاضیدانان، مورد پژوهش واقع شد. بنا به اهمیت توابع و نقش آن‌ها در ریاضیات پایه و عمومی، این نوشتار از مجله فردرس را به این گونه توابع اختصاص داده‌ایم. البته در این بین تفاوت تابع حقیقی و نگاشت (Map) نیز بیان شده و خصوصیات هر یک مورد بحث قرار می‌گیرد.

تعریف تابع و نگاشت در ریاضیات

به طور شهودی، می‌توان تابع را یک فرآیند یا «عملگر دو دویی» (Binary Operation) در نظر گرفت که به واسطه آن هر عنصری از یک مجموعه به یک عنصر به مجموعه دیگر مرتبط می‌شود. البته نحوه ارتباط در اینجا دارای شرایطی است که در ادامه به آن خواهیم پرداخت.

به طور رسمی تابع f از مجموعه X به مجموعه Y به صورت یک مجموعه است که شامل زوج‌های مرتبی مثل (x,y) بوده که عنصر اول آن از مجموعه X گرفته شده و مولفه دوم آن نیز متعلق به مجموعه Y است. در این بین شرطی وجود دارد که طی آن هر عنصری از X نباید بیش از یک بار در تابع ای مجموعه زوج‌های مرتب، به کار رفته باشد. به بیان دیگر نباید به ازاء یک مقدار از مجموعه X دو مقدار در تابع ای مجموعه Y پیدا شود.

نکته: اگر چنین اتفاقی بیافتد، مجموعه زوج‌های مرتب را یک «رابطه» (Relation) می‌نامند. پس هر تابع یک رابطه است ولی هر رابطه، یک تابع نیست.

نگاشت در ریاضیات

اغلب هر تابع را یک «نگاشت» (Map) در نظر می‌گیرند ولی بعضی ریاضیدانان، برای مفهوم نگاشت و تابع، تمایز قائل می‌شوند. برای مثال «سرژ لانگ» (Serge Lang)، ریاضیدان آمریکایی-فرانسوی، تابع را برای نگاشت‌هایی که همدامنه آن زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی یا مختلط است به کار می‌برد و معتقد است که نگاشت حالت کلی‌تری از تابع را شامل می‌شود.

از طرفی، اغلب منظور از نگاشت همان «همریختی» (Homomorphism) است. مثلا برای نشان دادن یک گروه همریخت از G به H از اصطلاح نگاشت خطی یا نگاشت از G به H استفاده می‌کنند. گاهی هم زمانی یک تابع را نگاشت می‌نامند که همدامنه آن دقیقا منطبق با مجموعه مقادیر تابع باشد. به H از اصطلاح نگاشت خطی یا نگاشت از G به H استفاده می‌کنند. گاهی هم زمانی یک تابع را نگاشت می‌نامند که همدامنه آن دقیقا منطبق با مجموعه مقادیر تابع باشد.(سایت فردرس،

مقاله تابع حقیقی و نگاشت در ریاضیات)

[9] یک معقول منفصل نه مثال منفصل

بازبینی #2
ایجاد شده 10 دسامبر 2023 12:19:03 توسط ... .
به روزرسانی شده 10 دسامبر 2023 13:04:37 توسط ... .