فصل اول: مقدّمات

- الف) اعداد و مجموعه های آن
- ب) کانتور؛ نظریّات و بازتاب آن
- ج) تبیین نظریه کانتور

الف) اعداد و مجموعه های آن

الف) اعداد و مجموعه های آن

۱. مجموعه اعداد طبیعی

«از مطالب خیلی ساده، این است که مثلاً[1] مجموعه اعداد طبیعی[2] که از یک شروع می‌شود و تا بی‌نهایت می‌رود. بین دو عضو از این مجموعه، دیگر نمی‌توانید چیزی از اعداد طبیعی پیدا کنید. وقتی سر و کارتان با اعداد طبیعی است، بین دو و سه، چه عددی است؟ هیچی. بعد از دو، سه است و بین آن‌ها چیزی نیست. همچنین اعداد صحیح مثبت و منفی. تمام اعداد صحیح به این صورت است، یعنی بین دو عضو از یک مجموعه، عضو دیگری نیست.

۲. مجموعه اعداد گویا

اما وقتی سراغ اعداد گویا[3] می‌رویم، تعبیر بسیار مهم و اعجاب‌آوری است؛ وقتی آدم به آن فکر می‌کند واقعاً به‌تش می‌گیرد. مجموعه اعداد گویا چیست؟ یعنی آن عددی که از نسبت بین دو عدد حاصل می‌شود. الآن بین یک و دو، عددی نداشتیم، اما می‌گوییم یک دوم؛ یعنی نصف. دو سوم، سه چهارم. یعنی همین فاصله‌ای که بود، دو و یک سوم؛ بین دو و سه دارید عدد پیدا می‌کنید. این‌ها اعداد نسبی می‌شوند. اعدادی که مُنطَق و گویا هستند.

مجموعه اعداد گویا؛ فشرده

چیز عجیب و غریب این است که ریاضی‌دان‌ها می‌گویند: مجموعه اعداد گویا فشرده است[4]. این فشرده یعنی چه؟ خیلی مهم است. فشرده یعنی هر دو عدد گویا در هر کجا پیدا کنید، نه تنها بین آن‌ها فقط یک عدد نیست، بلکه دوباره بین‌هایت عدد گویا است؛ خیلی است. اگر دو عدد گویا مثلاً یک دوم با یک سوم را با کسرها مدام به هم نزدیک کنید، بین‌هایت جلو بروید و به جایی برسید که تصورش سخت است، باز بین آن دو عدد گویا، بین‌هایت عدد گویا است. وقتی فکرش را می‌کنید، این فشردگی یک امر به‌آوری است. یعنی دوباره بین هر دو عضو، بین‌هایت عضو از همان مجموعه هست؛ به این، فشردگی می‌گویند. این درکش ساده است.

مجموعه اعداد گویا؛ شمارا

اما آن‌چه که ره‌آورد قرن بیستم بود و به‌آور است، این است - با برهانی که در فضای ریاضی ثابت شده - که می‌گویند: این مجموعه‌های اعداد گویا که فشرده است، شمارا‌ست[5]. شمارا به چه معنا است؟ یعنی تا‌نظر یک به یک[6] دارد با مجموعه اعداد طبیعی. از نظر قوّه‌ی بی‌نهایت، با اعداد طبیعی یکی است[7]. به اصطلاح اعداد ترانس‌فینی[8]، هر دوی‌ش الف‌ْصفر است.

اعداد طبیعی فشرده نبود؛ بین هر دو عضوش فاصله‌ای نبود. این مجموعه اعداد طبیعی با اعداد گویایی که بین هر دو عضوش، بی‌نهایت عضو است، از نظر زور بی‌نهایت بودن، یکی هستند. از

نظر اعداد بی‌نهایتها، هر دو، الف صفر هستند و شمارا. شمارا یعنی تناظر یک به یک دارد با مجموعه اعداد طبیعی.

- [9]

الف صفر، نام عددهای بی‌نهایتها است. عدد ترانس‌فینی می‌گوید؛ اعداد متعالی. الف صفر، اولین آنها است که همان اعداد طبیعی است و هر مجموعه بی‌نهایتی که با اعداد طبیعی بی‌نهایت اول، تناظر یک به یک داشته باشد، شمارا است؛ می‌توانیم آن را بشماریم و درجه بی‌نهایت بودنش با درجه اعداد طبیعی قوّتش برابر است.

۳. مجموعه اعداد حقیقی

حال مهم این بود:

مجموعه اعداد حقیقی؛ ناشمارا

مجموعه اعداد حقیقی نا شمارا‌ست. یعنی نمی‌توان آن را شمرد؛ تناظر یک به یک ندارند. از اینجا نتیجه می‌گیریم که مجموعه اعداد گویا هرچند فشرده است، اما به اندازه کافی فشرده نیست؛ تعبیری است که دارند. یعنی ولو بین دو عدد باز بی‌نهایت عدد است، اما باز روی محور، نقاطی را پیدا می‌کنیم که گویا نیست و گنگ است. در اعداد غیرگویا، هم اعداد رسم‌پذیر و هم غیررسم‌پذیر هستند، مثل عدد پی[10] که اصلاً رسم‌پذیر نیست ای اعداد گنگی که رسم‌پذیر است، مثل رادیکال دو که با خط‌کش و پرگار نشانش می‌دهیم؛ می‌گوید این نقطه را که می‌بینی، این نقطه، عدد گویا نیست. محال است بتوانید آن را به یک عدد گویا بیان کنید، ولی نقطه آن، این است. پس معلوم شد اعداد گویا که این قدر گسترده است، باز بی‌نهایت عدد داریم که در مجموعه اعداد گویا نیست؛ این خیلی مهم است[11].[12]»

---

[1] نوشته پیش رو، تنظیم و گردآوری مطالبی است که در جلسات مختلف از جمله جلسات هشتم، یازدهم و سی و دوم فقه هوش مصنوعی و جلسه شرح توحید صدوق تاریخ 26/9/1398 و جلسه سوم مرور اجمالی تاریخ ریاضیات افاده شده است. علاوه‌بر افادات، از متن مقاله باخدایی گام به گام در فصل دوم و تقریرات شرح این مقاله که در جلسات خارج اصول فقه به تناسب مطرح شده است بهره بردهایم.

[2] اعداد طبیعی یا اعداد صحیح مثبت اعدادی هستند که از یک (۱) شروع می‌شوند و تا بی‌نهایت (عدد n) ادامه دارند. و شامل صفر نمی‌شود (عدد صفر مرز میان اعداد مثبت و منفی است) و برای شمارش (به‌طور مثال در «شش سکه روی میز است») و برای ترتیب (به‌طور مثال در «این سومین شهر بزرگ در کشور است») به کار می‌روند. در اصطلاح‌شناسی ریاضیات، لغت مورد استفاده برای شمارش اشیاء واقعی «اعداد ترتیبی» است. مجموعهٔ اعداد طبیعی همان مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت یعنی {... و ۱، ۲، ۳} است. این اعداد شامل اعداد مرکب، اعداد اول و یک است. به بیان ساده، عدد طبیعی، عددی است که در طبیعت وجود دارد و برای شمردن عناصر طبیعی استفاده می‌شوند، برای مثال عدد

صفر ای اعداد منفی در طبیعت وجود ندارند و در مجموعه اعداد طبیعی نیستند.(سایت ویکی پدیا)

[3] عدد گویا ای عدد کسری (به انگلیسی: Rational number) در علم ریاضیات، عددی است که می‌تواند به صورت کسر ای (p / q) از دو عدد صحیح p و q (به طوری که p صورت کسر و q مخرج کسر باشد.) بیان شود. به عبارت دیگر، اعداد گویا کسرهایی هستند که از تقسیم عدد صحیح بر عدد صحیح دیگر (به جز صفر) پدید آمده باشد. از آنجایی که q می‌تواند برابر با عدد یک باشد؛ پس تمامی اعداد صحیح، طبیعی و حسابی، عدد گویا نیز هستند.

نماد ریاضی اعداد گویا

مجموعه اعداد گویا معمولاً با حرف Q نمایش داده می‌شوند که به انتخاب ـوزپه پئانو از ابتدای کلمهٔ ایتالیایی ـquoziente، به‌معنای خارج‌قسمت، اخذ شده‌است

تعریف

به‌طور کلی می‌توان مجموعه اعداد گویا را بدین صورت تعریف کرد: اگر ما یک عدد طبیعی داشته باشیم و آن را (مثل x) بر دیگری (مثل y) تقسیم کنیم؛ به طوری که (یا به شرطی که) هم x (صورت) و هم y (مخرج) عضو مجموعه اعداد صحیح (Z) باشند؛ و y (مخرج) برابر با صفر نباشد؛ آنگاه نسبت x به y (کسر مورد نظر) عددی گویا خواهد بود.

[4] این مجموعه[مجموعه اعداد گویا] خاصیت مهم **چگالی** بودن را دارد. منظور این است که بین هر دو عدد گویای متمایز عدد گویای دیگری در حقیقت بی‌نهایت عدد گویای دیگر - وجود دارد. مثلاً بین ۰ و ۱ اعداد گویای

1/2 .2/3 .3/4 .4/5 .5/6 .....n/(n+1)

قرار دارند، بین ۰ و اعداد گویای

1/3.2/5.3/7.4/9.5/11....n/(2n+1)

قرار دارند. (تاریخ ریاضیات، ج ۲، ص ۳۰۳-۳۰۴)

[5] در ریاضیات، یک مجموعه شمارا است اگر یا متناهی باشد یا بتوان تناظری یک به یک از آن با مجموعه اعداد طبیعی ایجاد کرد.

معادلاً، یک مجموعه شمارا است اگر تابعی یک به یک از آن به اعداد طبیعی وجود داشته باشد؛ یعنی هر عضوی از آن مجموعه باید به عددی طبیعی و اختصاصی مرتبط شود، یا اینکه اعضای آن مجموعه را بتوان یکی یکی شمرد، با اینکه به علت تعداد اعضای نامتناهی، این شمارش هیچگاه نباید پایان یابد.

به بیان حرفه ای تر، با فرض اصل انتخاب شمارا، یک مجموعه شمارا است اگر عدد اصلی آن (تعداد اعضای آن مجموعه) نسبت به مجموعه اعداد طبیعی بیشتر نباشد. به مجموعه شمارایی که متناهی نباشد شمارای نامتناهی می‌گویند.

این مفهوم منتسب به جرج کانتور است، کسی که وجود مجموعه های نامتناهی را اثبات کرد، یعنی مجموعه هایی که شمارا نباشند؛ مثلاً مجموعه اعداد حقیقی.

تعریف

مجموعه‌ای را شمارا (قابل شمارش) می‌نامند، که ای متناهی است یا عدد کاردینال آن با کاردینالیتهٔ مجموعهٔ اعداد صحیح و مثبت یکی است. به مجموعه‌ای که شمارش‌پذیر نیست، مجموعهٔ نامشمارا (مجموعهٔ غیرقابل شمارش) گفته می‌شود. به‌هنگامی که یک مجموعهٔ نامتناهی S شمارش‌پذیر است، عدد کاردینال آن با 0 ? نشان داده می‌شود.(سایت ویکی پدیا)

در این زمینه همچنین به سایت درآمد به منطق، صفحه مجموعه‌های متناهی، نامتناهی، شمارا، نامشمارا و مجله رشد ریاضی، مقاله مجموعه‌های متناهی، نامتناهی، شمارا و نامشمارا مراجعه فرمایید.

[6] در ریاضیات یک تناظر دوسویه (یا تناظر یک به یک) (به انگلیسی: one-to-one correspondence یا bijection) به تابعی میان اعضای دو مجموعه گفته می‌شود به شرط این که هر عضو از هر مجموعه با دقیقاً یک عضو از مجموعه‌ی دیگر جفت شده باشد. در هیچ‌کدام از مجموعه‌ها هیچ عضو بدون جفتی وجود ندارد.

هر تابع دوسویی از مجموعهٔ X به مجموعهٔ Y دارای یک تابع وارون از Y به X است. اگر این دو مجموعه متناهی باشند در این صورت وجود تناظر یک‌به‌یک میان اعضای آن‌ها نشان‌دهندهٔ این است که تعداد اعضای این دو مجموعه برابر است. در مورد مجموعه‌های نامتناهی این تناظرها باعث به وجود آمدن مفهوم اعداد کاردینال شدند که روشی برای بررسی بی‌نهایت‌های متفاوت هستند.

هر تابع دوسویی از یک مجموعه به خود آن مجموعه جایگشت نام دارد.

توابع دوسویی برای بسیاری از مباحث ریاضی ابزاری ضروری هستند. به عنوان مثال: تعاریف یکریختی و همسانریختی.

تعریف

برای این که تابع f از مجموعه X و به مجموعهٔ Y دوسویی باشد باید چهار شرط زیر برقرار باشند:

- هر عضو مجموعهٔ X باید با حداقل یک عضو مجموعهٔ Y جفت‌شده‌باشد،
- هیچ عضو X نباید با بیش از یک عضو Y جفت‌شده‌باشد،
- هر عضو مجموعهٔ Y باید با حداقل یک عضو مجموعهٔ X جفت‌شده‌باشد و
- هیچ عضو Y نباید با بیش از یک عضو X جفت‌شده‌باشد.

شرط‌های یک و دو تضمین می‌کنند که f تابعی با دامنهٔ X است. شرط‌های یک و دو گاهی به صورت یک شرط هم نوشته می‌شوند: باید هر عضو مجموعهٔ X دقیقاً با یک عضو از مجموعهٔ Y جفت شود. توابعی که شرط سوم را دارا هستند توابع پوشا نام دارند. شرط چهارم هم تعریف توابع یک‌به‌یک است. با توجه به این عبارت می‌توان نتیجه گرفت که یک تابع دوسویی است اگر و فقط اگر هم یک‌به‌یک باشد هم پوشا.

مثال

معلم در کلاس به دانش‌آموزان می‌گوید روی صندلی‌ها بنشینند و مشاهده می‌کند همه دانش‌آموزان نشسته‌اند و تمام صندلی‌ها پر هستند و نتیجه می‌گیرد تعداد دانش‌آموزان و صندلی‌ها برابر است. با بررسی ۴ شرط تعریف می‌توان نتیجه گرفت که با جفت کردن هر دانش‌آموز با صندلی‌اش می‌توان تناظر یک‌به‌یک میان دانش‌آموزان و صندلی‌ها ایجاد کرد:

تمام دانش‌آموزان نشسته‌اند (هیچ‌کدام سرپا نیست)،

هیچ دانش‌آموزی روی بیش از یک صندلی ننشسته است.

تمام صندلی‌ها پر هستند و

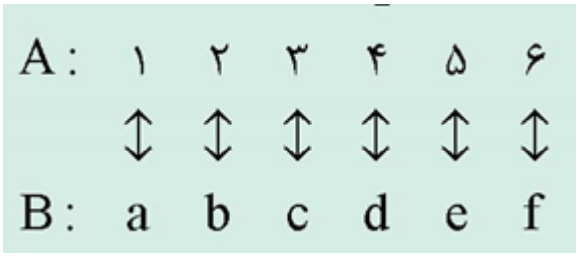
روی هیچ صندلی بیش از یک نفر ننشسته است.

پس میان دانش‌آموزان وصندلی‌ها تناظر یک‌به‌یک برقرار است و در نتیجه تعداد دانش‌آموزان و صندلی‌ها برابر است.

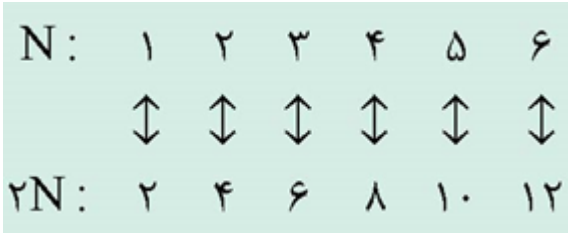
مثال دیگر بازیکنان فوتبال (یا هر ورزش دیگر) و جایگاه آن‌ها در زمین بازی است. اگر ۱۱ بازیکن و ۱۱ جایگاه در ترکیب تیم در نظر بگیریم با جفت کردن هر بازیکن با جایگاهش تناظر به دست می‌آید. چون ۴ شرط فوق برآورده می‌شوند.(سایت ویکی پدیا)

تناظر یک‌به‌یک: اگر A و B دو مجموعه باشند و به ازای هر عضو از A یک عضو از B و به ازای هر عضو از B یک عضو از A وجود داشته باشد، می‌گوییم A و B تناظر یک‌به‌یک دارند و می‌نویسیم: A?B.

برای مثال، اگر فرض کنیم: $A = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ و $B = \{a,b,c,d,f\}$ ، در این صورت واضح است که: A=B. این تناظر یک‌به‌یک را به شکل زیر ملاحظه می‌کنید:



همانطور که در تعریف دقت کردید، مفهوم تناظر یک‌به‌یک بین دو مجموعه A و B هیچ محدودیتی برای نامتناهی بودن این دو مجموعه ایجاد نمی‌کند و اگر این مفهوم را به دقت به‌کار ببریم، به سادگی و به‌صورت زیر می‌توان نشان داد که مجموعه عددهای طبیعی و مجموعه عددهای طبیعی زوج تناظر یک‌به‌یک دارند؛ یعنی: N?۲N



(مجله رشد ریاضی، مقاله مجموعه‌های متناهی، نامتناهی، شمارا و ناشمارا)

[7] تعداد عنصرهای دو مجموعه متناهی X و Y برابر است اگر و تنها اگر یک تناظر یک به یک f: X Y بین X و Y وجود داشته باشد. هرچند که عبارت تساوی تعداد عنصرها را برای حالتی که مجموعه‌های X و Y نامتناهی هستند به کار نمی بریم، به نظر می‌رسد طبیعی باشد فکر کنیم دو مجموعه نامتناهی که در تناظر یک به یک هستند، دارای یک اندازه هستند. ما این ادراک را به‌صورت زیر بیان می‌کنیم:

دو مجموعه X و Y را هم‌توان می‌گوییم و نماد X Y را برای آن به کار می‌بریم، هرگاه بین X و Y یک تناظر یک به یک f: X Y وجود داشته باشد. (نظریّه مجموعه‌ها و کاربردهای آن، ص ۱۲۲)

[8] اعداد ترامتناهی اعدادی نامتناهی‌اند، بدین معنا که آن‌ها بزرگ‌تر از تمام اعداد متناهی‌اند و لزوماً نامتناهی مطلق نیستند. عبارت ترامتناهی (transfinite) توسط جورج کانتور ابداع شد. او می‌خواست که با این کلمه اشاره‌ای ضمنی به کلمهٔ بی‌نهایت کرده باشد، تا بدین شکل بر متناهی نبودنشان اشاره کرده باشد. با این حال برخی از نویسندگان معاصر نسبت به این کلمه مردد هستند؛ اکنون به کار بردن کلمهٔ «بی‌نهایت» برای کاردینال‌ها و اردینال‌های بی‌نهایت پذیرفته شده‌است. با این حال کلمهٔ ترامتناهی نیز هنوز به کار برده می‌شود.(سایت ویکی پدیا)

[9] سؤال یکی از دوستان حاضر در جلسه درس

[10] در این زمینه به مقاله گردآوری «کاربرد مفاهیم ریاضی در تبیین مفاهیم الهیاتی(۱): عدد پی» و صفحه عدد پی در سایت فدکیه مراجعه فرمایید.

[11]جلسه یازدهم فقه هوش مصنوعی

[12] در کتاب تاریخ ریاضیات در مورد اعداد ترانسفینی اینچنین می‌خوانیم:

نظريه رياضی جديد مجموعه ها يکی از مهم‌ترين ابداعات ذهن بشری است. به دليل قاطعيت آن معمول برخی از ايده هايی که در آن يافت می‌شود و به دليل برخی روش‌های ممتاز اثبات ناشی از آن نظريه مجموعه ها جذابيت وصف ناپذيری يافته است ولی بالاتر از همه اين نظريه اهميت بسيار زيادی تقريباً در تمام رياضيات دارد. اين نظريه درغنا، وضوح، توسيع و تعميم بسياری از زمينه های رياضيات بی اندازه مؤثر بوده است و نقش آن در مطالعه مبانی رياضيات کاملا اساسی است. نظريه مجموعه ها همچنين حلقه های ارتباط بين رياضيات از يک سو و فلسفه و منطق از سوی ديگر را تشکيل می دهد. دو مجموعه را هم ارز گويند اگر و فقط اگر بتوان آن‌ها را در تناظر يک به يک قرار داد.

وقتی دو مجموعه هم ارز باشند می گويند دارای يک عدد اصلی هستند. اعداد اصلی مجموعه های متناهی را می‌توان با اعداد طبيعی مشخص کرد. اعداد اصلی مجموعه های نامتناهی به اعداد ترانسفينی معروف اند و نظريه اين اعداد اولين بار توسط گئورگ کانتور در يک سری مقاله قابل توجه که از سال ۱۸۷۴ آغاز شد بسط يافت. اغلب اين مقالات در مجله های آلمانی ماتماتيشه آنالن و مجله رياضيات به چاپ رسيدند. قبل از مطالعه کانتور، رياضيدانان فقط يک بی‌نهايت را پذيرفته بودند که با علامتی شبيه به ∞ نشان داده می شد و اين علامت بدون تمايز برای نشان دادن عدد اعضا در مجموعه هايی نظير مجموعه کليه اعداد طبيعی ومجموعه کليهٔ اعداد حقيقی به کار گرفته می‌شد با کار کانتور ديدگاه کاملا جديدی مطرح گرديد و مقياس و حسابی برای بی‌نهايتها به

دست آمد.

این اصل اساسی که مجموعه های هم ارز عدد اصلی واحدی دارند، در موردی که مجموعه های تحت بررسی مجموعه های نامتناهی باشند وضعیتهای جالب و شگفت آوریپیش می آورد. گالیله پیشتر در نیمه دوم قرن شانزدهم متوجه شده بود که ، به كمك تناظر n ، مجموعه كليه اعداد صحيح مثبت را می توان در يك تناظر يك به يك با مجموعه کلیه اعداد صحیح مثبت و زوج قرار داد از اینرو باید به هر یک از این دو مجموعه عدد اصلی واحدی اختصاص داد و ، از این نقطه نظر باید گفت که تعداد اعداد صحیح مثبت برابر تعداد اعداد صحیح مثبت زوج است بی درنگ می توان مشاهده کرد که اصل موضوع اقلیدسی مبنی بر اینکه کل بزرگتر از جزء است در موقعی که اعداد اصلی مجموعه های نامتناهی مورد بحث اند نمی تواند جایز باشد. در واقع در کیندر حدود ۱۸۸۸، يك مجموعه نامتناهی را مجموعه ای تعریف کرد که با یک زیر مجموعه حقیقی خودش هم ارز باشد.

ما عدد اصلی مجموعه کلیه اعداد طبیعی را با d نشان خواهیم داد،(كانتور این عدد اصلی را با حرف عبری الف با اندیس صفر یعنی نشان داد. پ) و هر مجموعه ای با این عدد اصلی را **شمارا** خواهیم نامید نتیجه می شود که مجموعه ای مانند که شمارا است اگر و فقط اگر اعضای آن را بتوان به صورت دنباله بی پایان (s?, s? , s? , ...) نوشت. چون به آسانی می توان نشان داد که هر مجموعه نامتناهی زیر مجموعه شمارایی دارد، نتیجه می شود که d «کوچکترین» عدد ترانسفینی است. کانتور در یکی از اولین مقاله های خود درباره نظریه مجموعه ها ، شمارا بودن دو مجموعه مهم را که در نگاه اول به زحمت واجد این خاصیت به نظر می رسند، اثبات کرد.

اولین مجموعه ، مجموعه اعداد گویا است. این مجموعه خاصیت مهم **چگال** بودن را دارد. منظور این است که بین هر دو عدد گویای متمایز عدد گویای دیگری -در حقیقت بینهایت عدد گویای دیگر - وجود دارد.

مثلاً بین ۰ و ۱ اعداد گویای

1/2 .2/3 .3/4 .4/5 .5/6 .....n/(n+1)

قرار دارند، بین ۰ و ۱ اعداد گویای

1/3.2/5.3/7.4/9.5/11....n/(2n+1)

قرار دارند ....

به موجب این خاصیت ممکن است این تصور به وجود آید که عدد تر انسفینی مجموعه اعداد گویا بزرگتر ازd است.(عدد اصلی مجموعه ای مانند A را بزرگتر از عدد اصلی مجموعه ای مانند B گویند اگر و فقط اگر B باياك زير مجموعه حقيقی A هم ارز باشد ، ولی A با هیچ زیر مجموعه حقیقی B هم ارز نباشد. پ) کانتور نشان داد که چنین نیست و برعکس،مجموعۀ اعداد گویا شمارا است اثبات آن جالب و به صورت زیر است:

قضیه ۱: مجموعه اعداد گویا شمارااست.

...

دومین مجموعه ای که توسط کانتور مطالعه شد ، مجموعه اعدادی است که ظاهراً بسیار وسیعتر از مجموعه اعداد گویاست...

قضیه ۲ مجموعه كليه اعداد جبری شمارا است.

با توجه به دو قضیه قبل این امکان باقی می‌ماند که همه مجموعه های نامتناهی شما را هستند. خلاف آن توسط کانتور با برهان اعجاب آوری در قضیه مهم زیر نشان داده شد.

قضیه ۳ مجموعه کلیه اعداد حقیقی در بازه 0<x<1نامشماراست.

اثبات به برهان خلف است و روش نامعمولی موسوم به فرایند قطری کردن کانتور را مورد استفاده قرار می دهد. در این صورت فرض می‌کنیم که مجموعه شمار است. با این فرض می‌توان اعداد مجموعه را در دنباله ای مانند $\{p_1,p_2,p_3,...\}$ فهرست کرد. هر يك از این اعداد را می‌توان به طور منحصر بفردی به صورت يك كسر اعشاری نامختوم نوشت ؛ در این رابطه یادآوری این مطلب مفید است که هر عدد گویا را می‌توان به صورت «اعشاری مکرر نوشت؛ مثال عددی مانند 0.3 را می توان به صورت 0.299999... نوشت. در این صورت می‌توانیم دنباله را با آرایه زیر نمایش دهیم:

$_1=0.a_{11}\ a_{12}\ a_{13}...$
$_2=0.a_{21}\ a_{22}\ a_{23}...$
$_3=0.a_{31}\ a_{32}\ a_{33}...$
که در آن $a_{i\ j}$ به معرف یکی از ارقام ۱۰، ۲، ۳، ۴، ۵ ، ۶، ۷، ۸، ۹ است . حال علیرغم دقتی که در فهرست کردن کلیه اعداد بین ۰ و ۱ به کار رفته است عددی وجود دارد که نمی توانستهٔ در فهرست وارد شود چنین عددی$0.b_1\ b_2\ b_{3...}$ است که در آن، مثلا$b_k = 7$ در صورتی که $a_{kk}\ 7$ و $b_k=3$ اگر $a_{kk}\ 7$ به ازای هر $k=...n...3,2,1$.

این عدد آشکارا بین ۰ و ۱ قرار دارد و باید با هر يك از اعداد p متفاوت باشد، زیرا با P_1حداقل در رقم اعشاری اول تفاوت دارد، با P_2 حداقل در رقم اعشاری دوم تفاوت دارد، با P_3حداقل در رقم اعشاری سوم تفاوت دارد، و الی آخر. بدین ترتیب فرض آغازین که همه اعداد حقیقی بین ۰ و ۱ را می‌توان در دنباله ای فهرست کرد ، قابل قبول نیست، ولذا این مجموعه باید نامشمار باشد.

کانتور قضیه مهم زیر را از قضایای ۲ و ۳ نتیجه گرفت:

قضیه ۴ اعداد متعالی موجودند.

چون بنا بر قضیه ۳ مجموعه اعداد حقیقی بین ۱و۰ نامشماراست، به آسانی می توان نشان داد که مجموعه اعداد مختلط نیز نامشماراست. اما بنا بر قضیه ۲ مجموعه اعداد جبری شمار است. نتیجه می‌شود که باید اعداد مختلط که جبری نیستند وجود داشته باشند و قضیه ثابت می شود. برهان فوق برای قضیه ۴ برای همه ریاضیدانان قابل قبول نیست. قابل قبول بودن یا غیر قابل قبول بودن این برهان مربوط به تصور ما از چگونگی وجود ریاضی است و ریاضیدانانی وجود دارند که به زعم آنها وجود ریاضی فقط موقعی ثابت می‌شود که یکی از چیزهایی که وجودشان مورد بحث است عملا ساخته و نشان داده شود. ولی برهان بالا وجود اعداد متعالی را با ایجاد نمونه مشخصی از چنین اعداد ثابت نمی کند. در ریاضیات برهانهای وجودی از این نوع غیر ساختنی فراوان اند که در آنها وجود، فرضاً تنها با نشان دادن اینکه فرض عدم وجود منجر به تناقض می‌شود، ثابت می‌گردد . مثلا بسیاری از براهین قضیه اساسی جبر بر چنین اساسی فرمولبندی شده اند. به دلیل ناخشنودی برخی ریاضیدانان از برهانهای وجودی غیر ساختنی، تلاش زیادی صرف جانشینی کردن این برهانها با برهانهایی شده است که عملاً یکی از چیزهای مورد بحث را می دهند.

اثبات وجود اعداد متعالی و این اثبات که عدد خاصی متعالی است دو مطلب کاملا متفاوت اند. دو می اغلب مسئله بسیار دشواری است. ارمیت در سال ۱۸۷۳، ثابت کرد که عدد e، پایه لگاریتم طبیعی متعالی است. لیندمان ، در سال ۱۸۸۲، برای اولین بار متعالی بودن را ثابت کرد. متأسفانه برای اثبات این حقایق جالب در این کتاب محدوداتی وجود دارد. دشواری مشخص کردن جبری بودن یا متعالی بودن عدد مفروض خاصی را می توان با این حقیقت روشن کرد که هنوز معلوم

نیست که جبری ای متعالی است . دستاورد جدیدی در این زمینه اثبات ماهیت متعالی بودن اعدادی به شکل است که در آن a عددی جبری جز ۰ و ۱ است و b يك عددان گوياى جبرى مىباشد اين نتيجه كه در سال ۱۹۳۴ توسط الکساندر او سیپوویچ گلفوند (متولد۱۹۰۶) به دست آمده و امروزه قضیه گلفوند نامیده می شود حاصل کوشش تقریباً ۳۰ ساله ای برای اثبات متعالی بودن به اصطلاح عدد هیلبرت ، 2 بوده است.

چون مجموعه همه اعداد حقیقی در بازه **0<x<1** نامشمار است، عدد تر انسفینی این مجموعه بزرگتر از d است. ما آن را با c نشان میدهیم و آن را **عدد اصلی متصله** اطلاق می کنیم. عقیده کلی بر این است که c عدد ترانسفینی بعد از d است، یعنی اینکه هیچ مجموعه ای نیست که دارای عدد اصلی بزرگتر از d و کوچکتر از c باشد. این اعتقاد به فرض متصله موسوم است ولی علی رغم کوششهای شدید هنوز برهانی برای آن پیدا نشده است. نتایج زیادی از این فرض استنتاج شده اند و به حدود سال ۱۹۴۰، منطقی اطریشی کورت گودل (۱۹۰۶) - (۱۹۷۸) به اثبات این نکته موفق شد که فرض متصله با مجموعۀ اصول موضوعه مشهوری مربوط به نظریه مجموعه ها سازگار است به شرطی که خود این اصول موضوعه سازگار باشند. گودل حدس زد که انکار فرض متصله نیز با اصول موضوعه نظریه مجموعه ها سازگار است. این حدس را در سال ۱۹۶۳ دکتر پ. ج. کوهن از دانشگاه استانفورد ثابت کرد و بدین ترتیب نشان داد که فرض متصله از اصول موضوعه نظریه مجموعه ها مستقل است و بنا بر این قابل استنتاج از این اصول موضوعه نیست. این وضعیت شبیه به وضعیت اصل توازی در هندسه اقلیدسی است.

نشان داده شده است که مجموعه کلیه توابع تك مقداری مانند $f_1(x)$ که بر بازه **0<x<1** تعریف شده اند، دارای عدد اصلی بزرگتر از c هستند ولی اینکه آیا عدد اصلی مزبور عدد بعد از c هست یا نیست معلوم نشده است. نظریه کانتور دنباله نامتناهیی از اعداد ترانسفینی را پیش بینی میکند و براهینی وجود دارند که مقصودشان نشان دادن آن است که تعداد نامحدودی از اعداد اصلی بزرگتر از متصله عملاً موجودند. (تاریخ ریاضیات، ج ۲، ص ۳۰۲-۳۰۷)

ب) کانتور؛ نظریّات و بازتاب آن

«بین ریاضی دان های قرن بیستم بحثی پیش آمده بود در قرن بیستم که به بهشت کانتور معروف شد. کانتور[1] یک ریاضی دان بود؛ نظریه مجموعه‌ها را آورد، بعد هم اعداد ترانسفینی و اعداد بینهایت. در قرن بیستم ریاضیات، برای بینهایت‌ها دستگاهی به پا کرد.

سخن هیلبرت: «بهشت کانتور»

یکی دیگر از ریاضیدانهای مهم قرن بیستم هیلبرت بود. ایشان یک جمله‌ای گفت که جمله او بین محافل علمی معروف شد. چون عده‌ای بعد از کانتور بودند تا تلاش کنند این حرفهای او را ذوب کنند و حذف کنند؛ ضعیفش کنند و از بین ببرند[3]. او که خودش ریاضی دان بزرگی بود این جمله را گفت: احدی را یارای این نیست که ما را از بهشتی که کانتور برای ما آورد بیرون کند[4]. این جمله معروف شد. یعنی تلاشهای کسانی که می‌خواهند اینها را تعطیل کنند، تلاش بی خودی است. بهشت کانتور در قرن بیستم معروف شد.

امکان ارائه «بهشت کانتور» با شواهد

به گمان من طلبه، برای ما امکاناتی فراهم است تا این بهشت را نشان بدهیم؛ نه اینکه یک چیزی همینطور بگوییم. باید نشان داده شود. یکی از شئون مهم این باور کانتور را پارسال در عدد پی نشان دادم[5]. عرض کردم نقطه عدد پی روی محور، بین سه و چهارده تا سه و پانزده صدم قرار می‌گیرد، بین اینها بینهایت نقاط مماتز متعین داریم. متعین ثابتی که هر چه پیشرفت کنیم آنها را به دست می‌آوریم. نه همینطور لایقفی[6]! نه، اعداد مماتز.

بینهایت بالفعل؛ بینهایت لا یقفی

[از زمان ارسطو، تمام بی نهایت ها، چه بی نهایت بزرگ و چه بی نهایت کوچک را با بی نهایت بالقوّه حل می کردند.بی نهایت بزرگ را می گفتند: لایقف . بی نهایت کوچک را می گفتند: بالقوّه . ما هم با این دوتا خیلی مانوس هستیم چون مبنای کتابهای ما هم معمولاً ارسطویی است. انسان خودش را قانع می‌کند به بی نهایت لا یقفی و کار تمام می‌شود[7]]

در این فاصله کوتاه، شما می‌توانید یک مفهوم افلاطونی را نشان بدهید. این، یکی از شعب آن بهشت است؛ کسی که دنبال اینها است وقتی احساس کرد دیگر فاصله نمی‌گیرد و دیگر به دیگری نگاه نمی‌کند. این خیلی مهم است؛ شما فقط این قدرت را داشته باشید که نشان بدهید.

الآن گنگ بودن عدد پی در زمان ما صاف صاف است. فقط از لوازمش استفاده‌ای که باید بکنیم، نمی‌کنیم[8].

سخن ویتگنشتاین

یک جا دیدم؛ بعد از این‌که هیلبرت این حرف را زد، ویگنشتاین گفته بود: من که هرگز زحمت نمی کشم تا شما را از این بهشت بیرون کنم؛ من فقط یک کار می‌کنم؛ من توصیف می‌کنم و می‌گویم این بهشت نیست، وقتی خودتان دیدید که بهشت نیست، خب از آن بیرون می‌آیید![9]
چرا شما را از بهشت بیرون کنم؟! من توضیح می‌دهم که این بهشت نیست، لذا خودتان بیرون می‌آیید. چون شما به خیال بهشت آن جا مانده‌اید، وقتی من توضیح دادم که بهشت نیست، خودتان بیرون می‌آیید. این جمله‌ای بود که او گفته بود. ویگنشتاین این را در جواب هیلبرت گفته بود. او گفته احدی را یارا نیست، او گفته بود من این جور توصیف می‌کنم.

پاسخ به ویتگنشتاین

به ذهن طلبگی من آمد که به این صورت جوابش را بدهم؛ بگویم ما که حاضر هستیم شما توصیف کنید اینجا بهشت نیست تا بیرون بیایید. اما چرا بیرون تشریف دارید و توصیف می‌کنید؟! بیایید داخل بنشینید و تعریف کنید. از اینجا تعریف کنید که بهشت نیست. می‌دانید تفاوت در چیست؟ ویگنشتاین، فیلسوف تحلیلی است و شروع فلسفه تحلیلی بسیاری مدیون او است. ظاهراً از استادش راسل اینطور نقل کرده‌اند: گفت زدن من آمد و گفت تشخیص شما چیست، استاد؟! اگر من فیلسوف می‌شوم بمانم، اما اگر نمی‌شوم یک شغلی را انتخاب کنم. خودش اینطور می‌گوید: اگر من را یک احمق می‌بینی خب فلسفه خواندن را رها کنم و مهندس بشوم. اگر من را احمق نمی‌بینی خب فلسفه را ادامه می‌دهم. استاد گفته بود، صبر کن تعطیلی ها پیش بیاید، من یک مقاله می‌دهم برو بنویس تا ببینم احمق هستی تا فلسفه را رها کنی یا نه؟! خب اینها شروع این فلسفه تحلیلی برای او بود[10][11].»

---

[1] گئورگ فردیناند لودویگ فیلیپ کانتور (۳ مارس ۱۸۴۵؛ [در برخی منابع ۱۹ فوریه نیز گزارش شده] – ۶ ژانویه ۱۹۱۸) ریاضیدانی آلمانی بود. آوازهٔ کانتور بیشتر به‌خاطر ابداع نظریه مجموعه‌ها می‌باشد چرا که امروزه به نظریه‌های بنیادین در ریاضیات تبدیل شده‌است. کانتور ایدهٔ تناظر یک به یک میان اعضای دو مجموعه را مطرح کرد، مفهوم بی‌نهایت و مجموعه‌های خوش‌ترتیب را تعریف نمود، و همچنین ثابت کرد که مجموعه اعداد حقیقی «بزرگ‌تر» از مجموعه اعداد طبیعی است. در حقیقت، روش کانتور در اثبات این قضیه نشان می‌داد که مجموعه‌های نامتناهی از بی‌نهایت‌ها وجود دارد. او اعداد اصلی و ترتیبی و حساب آن‌ها را تعریف کرد. **دستاوردهای کانتور از لحاظ فلسفی نیز جایگاه ویژه‌ای دارد و وی نیز به‌نیکی از این حقیقت آگاه بود**. در ابتدا تصور می‌شد که نظریه کانتور دربارهٔ اعداد ترامتناهی (ترانسفینی) تا حدود زیادی خالف شهود—یا حتی تکاندهنده—است، تا آنجا که با مقاومت شدید همعصران او همچون لئوپولد کرونکر و آنری پوانکاره، و بعدها هرمان ویل و لوئیتزن اخبرتوس یان بروار قرار گرفت، و لودویگ ویتگنشتاین نیز در مورد نظریهٔ او ایرادهای فلسفی بیان نمود. برخی از علمای مسیحی (به‌ویژه پیروان جدید فلسفه مدرسی) نیز می‌پنداشتند که دستاورد کانتور چالشی است بر یکتایی بی‌نهایت مطلق در طبیعت خدا؛ یعنی برابر دانستن نظریه اعداد ترامتناهی با همه‌خدایی، در حالی‌که **کانتور چنین مدعایی را به‌شدت در می‌کرد**. این اتفاقاها در برخی مواقع حتی شدت

بیشتری می‌یافتند: **پوانکاره از ایده‌های کانتور به‌عنوان بیماری گریزی یاد می‌کرد و می‌گفت که این بیماری نظام ریاضیات را عفونی می‌کند**. کرونکر نیز در زند عموم به‌مخالفت صریح با کانتور برمی‌خاست و به‌وی حملات شخصی می‌کرد؛ از جمله اینکه از او به‌عنوان یک "شارلاتان علمی،" یک "ازدین‌برگشته" و یک "فاسدکننده ٔجوانان" یاد می‌کرد. کرونکر حتی از اثبات کانتور مبنی بر شمارا بودن اعداد جبری و ناشمارا بودن اعداد متعالی ایراد می‌گرفت، در حالی‌که امروزه این نتایج بخشی از برنامه استاندارد درس ریاضی هستند. حتی ده‌ها پس از مرگ کانتور، ویتگنشتاین با دریغ نوشت که ریاضیات "مورد تاخت‌وتاز اصطلاحات آسیب‌رسان نظریه مجموعه‌ها قرار گرفته‌است." وی چنین اصطلاحاتی را "مزخرف مطلق،" "خنده‌آور،" و "نادرست" تلقی می‌کرد. گفته می‌شود که علت مجموعه افسردگی‌های کانتور از ۱۸۸۴ تا پایان زندگی او، دشمنی بسیاری از معاصرانش با وی بوده‌است، اگرچه برخی نیز از این افسردگی‌ها به‌عنوان ظهور اختلال دوقطبی در وی یاد می‌کنند. این انتقادهای شدید، بعدها به تحسین و تمجید تبدیل شدند. در سال ۱۹۰۴، انجمن سلطنتی جایزه ٔمدال سیلوستر را به‌وی داد که به‌عنوان بزرگترین جایزه و افتخار تلقی می‌شود که برای دستاورد ریاضی به شخصی اهدا می‌گردد. گفته می‌شود **کانتور بر این باور بوده که نظریه اعداد ترامتناهی از سوی خدا به‌وی الهام شده بوده‌است**. مشهور است که داوید هیلبرت از دستاورد کانتور در برابر منتقدان، این‌چنین دفاع می‌کرد: "هیچ‌کس نمی‌تواند ما را از بهشتی که کانتور آفریده، بیرون کند."(سایت ویکی پدیا)

[2] داوید هیلبرت (آلمانی: David Hilbert، ۲۳ ژانویه ۱۸۶۲ – ۱۴ فوریه ۱۹۴۳) ریاضیدان آلمانی و از مشهورترین ریاضیدانان قرن نوزدهم و آغاز قرن بیستم میلادی بود. او از اثرگذارترین ریاضیدانان در پیدایش و گسترش مکانیک کوانتومی و نظریه نسبیت است. هیلبرت طیف وسیعی از ایده‌های اساسی را در بسیاری از زمینه‌ها شامل نظریه ناوردا، حساب تغییرات، جبر جابجایی، نظریه جبری اعداد، بنیان‌های هندسه، نظریه طیفی عملگرها و کاربردهای آن در معادله انتگرالی، ریاضی فیزیک و نظریه برهان، کشف و توسعه داد.

او در کونیگسبرگ زاده شد و ۱۸۸۴ از دانشگاه این شهر دکترا گرفت و نزدیک ده سال را به تدریس در آن دانشگاه گذراند. سپس در ۱۸۹۵ به استادی دانشگاه گوتینگن رسید و تا پایان عمر در این شهر زیست.(سایت ویکی پدیا)

[3] در این زمینه به مقاله «GEORG CANTOR AND THE BATTLE FOR TRANSFINITE SET THEORY» (گئورگ کانتور و نبرد برای نظریه مجموعه های فرامتناهی) مراجعه فرمایید.

4] "No one shall drive us from the paradise which Cantor has created for us."(A glimpse of antor's paradise)

در این زمینه همچنین به صفحه«بهشت کانتور» در سایت فدکیه مراجعه فرمایید.

[5] جلسه ۸ فقه هوش مصنوعی

[6] ملاصدرا در بیان اقسام بی نهایت و تفکیک بین بی نهایت بالقوه و بی نهایت بالفعل می فرماید:

و منها أن غير المتناهي على معنيين: أحدهما بالقوة و هو غير المتناهي اللايقفي

و ثانيهما بالفعل و هو غير المتناهي العددي، و مقدورات الله تعالى عند المتكلمين غير متناهية بالمعنى الأول ال بالمعنى الثاني لأنهم منكرون لوجود الغير المتناهي بالفعل مرتبا كان أو غير مرتب متعاقبا كان أو مجتمعا و التوالت إنما يجوز في غير المتناهي بالمعنى الأول كقبول الجسم عند الحكماء للأنصاف المتداخلة غير المتناهية و الأرباع المتداخلة غير المتناهية و الثانية نصف الأولى.(الحكمة المتعالية، ج ۷، ص ۳۱۸)

شهيد مطهري بي نهايت بالقوة را اين گونه تبيين مي كند:

اعداد متناهي نيستند؛ يعني اگر اعداد را بيان كرده و بالا برويم و بگوييم ۱، ۲، ۳،...، ۱۰۰۰،...، ۱۰۰۰۰۰۰،... هر چه بالا برويم به عددي كه ما فوق آن نتوان عددي را فرض كرد نمي‌رسيم. هر عددي را كه ما فرض كنيم باز هم ما فوق آن عددي فرض مي‌شود، بلكه برابر آن عدد دو برابر هم فرض مي‌شود، بلكه خودش ضرب در خودش هم فرض مي‌شود، خود آن به قوه ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و... هم فرض مي‌شود. هر عددي را كه شما اعتبار كنيد و بگوييد اين آخرين عدد است باز هم بالاتر از آن عدد است. اين است كه مي‌گويند اعداد غير متناهي است.

اما **اينكه مي‌گويند اعداد غير متناهي است، منظور غير متناهي بالفعل نيست، بلكه منظور «غير متناهي ال يقفي» است**. اليتناهي بالفعل يعني اينكه ما يك موجود بالفعل غير متناهي داشته باشيم، مثل اينكه كسي بگويد ستاره‌هاي عالم بالفعل غير متناهي‌اند، ذرّات عالم بالفعل غير متناهي‌اند؛ كه اگر كسي گفت ستاره‌ها بالفعل غير متناهي است، بايد بگوييم ما الآن غير متناهي عدد ستاره در خارج داريم. اين يك مسأله است. اما آنكه مي‌گويد عدد غير متناهي است، به اين معنا نمي‌گويد. منظور غير متناهي ال يقفي است. غير متناهي ال يقفي به ذهن ما برمي‌گردد، به خارج مربوط نيست؛ يعني ذهن ما هر عددي را كه اعتبار كند عدد در آنجا متوقف نمي‌گردد؛ امكان اعتبار عددي ديگر كه يكي بيشتر اي دوتا بيشتر اي دو برابر آن اي هزار برابر آن باشد هست. اين را مي‌گويند «اليتناهي ال يقفي». شيخ همين جا اشكال خود را وارد مي‌كند.(مجموعه آثار شهيد مطهري، ج ۷، ص ۵۶۷-۵۶۸)

تناهي به دو معناست: يكي تناهي عددي، و ديگر تناهي ال يقفي.

نامتناهي عددي آن است كه شيء بالفعل موجود و نامتناهي باشد، مثل خط و سطح و جسم بالفعل موجود باشد و نهايت نداشته باشد. و نامتناهي ال يقفي آن است كه بالفعل موجود نباشد، بلكه به هر مرتبه كه رسد باز در آن چيزي بتوان فرض نمود.چنانچه حكما گويند كه جسم قابل قسمت است الى غير النهاية، كه هر اندازه جسم را تقسيم كنيم باز هم قابل قسمت است و به انتهاء نمي‌رسد. و اينكه حكما گويند نامتناهي وجود ندارد مقصود نامتناهي عددي است، ولي نامتناهي اليقفي جائز و واقع است، مثل اينكه جسم به نامتناهي تقسيم مي‌شود و اين قسمتها به جايي نمي‌رسند كه ديگر تقسيم نشوند. حكماي قديم يونان مي‌گفتند ابعاد نامتناهي است.(مجموعه رسائل عرفاني و فلسفي،ص ۲۶۹)

اين اصطلاح اولين بار در كلام ارسطو به كار رفته است. او در اين باره مي گويد:

قال الإسكندر: هل المتحرك على عظم ما يتحرك في أول حركته على أول جزء منه، أم لا؟ و ذلك أن كل حركة إنما صارت في زمان لأنه ليس يمكن أن يتحرك المتحرك على الشيء الموضوع ليتحرك عليه دفعة، لكنه يقطع منه شيئا بعد شيء؛ فإذا هذا هكذا، فالمتحرك يتحرك أولا على أول جزء من أجزاء العظم الذي يتحرك عليه. فإن كان الأول في العظم يمر بلا نهاية، فكل محرك يصير متحركا على أشياء بلا نهاية؛ و كل متحرك يتحرك بعد ما، فإنه يكون متحركا آخرا بلا نهاية أولية. و الأشياء التي بلا نهاية لا تقطع مسافة ما، فنقول: إنه لا بد - إذا كانت قسمة الأشياء المتصلة بلا نهاية - من أحد أمرين: إما أن تكون الحركة لا تجوز أولا على الجزء الأول، أو تكون قد تجوز على الجزء الأول من العظم إنما هو من قبل أن في العظم المتصل جزءا يتقدم و جزءا يتأخر. و ذلك أنه ليس

الأجزاء في المتصل بحال غير الحال التي نقول بها إن المتحرك نفسه يقطعها؛ فكيف إذا يوجد بعض الأجزاء متقدما و بعضها متأخرا في المتصل، إما بالفعل أم بغير الفعل؟ فنقول: إنه ليس شيء من الأعظام المتصلة أجزاؤه منفصلة، و لا هي في الكل بالفعل، لأن العظم إنما هو غير منقسم بالفعل؛ و لو كان منقسما بالفعل، لما كان عظما واحدا، و لا كانت الحركة واحدة. فإذا كانت الأجزاء التي في الكل ليست بالفعل فيه **فقد بقي أن يكون في الكل الذي هو متصل بالقوة، و يكون المتقدم و المتأخر المتصل إنما هو بالقوة لا بالفعل، و يكون المتحرك عليه إنما يتحرك على الجزء الأول أو لا على الحال التي يوجد بها الجزء في العظم، و وجوده فيه بالقوة.** فعلى هذه الجهة إذا يتحرك عليه. و إنما يفعل هذا من قبل أنه يتحرك عليه من غير أن يقسمه و من غير أن يجعل جزءا منه أو لا و جزءا ثانيا بالفعل. و المتحرك إذا تحرك على هذه الجهة على العظم فإنما يكون متحركا في الأجزاء الأوائل على حسب ما هي في العظم بالقوة، و **وجودها في العظم بالنهاية إنما هو** بالقوة. و معنى قولنا: إنه غير متناهية بالقوة، لا تقطع مسافتها؛ بل إنما وضعنا ذلك فيما كان بالفعل.(أرسطو عند العرب، صفحه: ۲۷۸)

وا رد جای دیگر رد مورد بی نهایت های بزرگ(رد اعداد) و کوچک(رد مقادیر) چنین می نویسد:

و بالواجب أيضا لزم أن يكون غير المتناهي أما بالزيادة فقد يظن أنه لا يمكن أن يتجاوز كل مقدار، و أما بالقسمة فقد يمكن؛ و ذلك أن <غير المتناهي و> الهيولى محاط بها من الخارج، و هي الشيء غير المتناهي و المحيط هو الصورة. و بالواجب أيضا صار في **العدد** في الذهاب إلى القلة نهاية، و **في الذهاب إلى الكثرة يزيد أبدا على كل عدة**. و صار **في المقدار** الأمر بالضد: أما إ**لى الصغر فقد يتجاوز كل مقدار**، و أما إلى الكبر فلا يمكن أن يوجد مقدار غير متناه. و السبب **العدد إنما هو** في ذلك أن الواحد غير منقسم - أي واحد كان - مثل الإنسان إنه إنسان واحد لا كثير، و **آحاد كثيرة و كمية ما. فقد يجب أن نقف عند ما لا ينقسم**، فإن الاثنين و الثلاثة إنما هي أسماء، و كذلك واحد من سائر الأعداد. **و أما ذهابه إلى الكثرة فقد يمكن توهمه دائما. فإن قسمة المقدار بنصفين، و نصفه بنصفين يمر بلا نهاية، فيكون <العدد غير متناه> بالقوة ؛ فأما بالفعل - فلا**. غير أنه قد يوجد منه ما يزيد دائما على كل عدة محددة، لكن هذا العدد ليس بمفارق لهذه القسمة، و لا بالنهاية أمر باق، لكنه أمر يتكون دائما، و كذلك الزمان و عدد الزمان.

فأما المقادير فإن الأمر فيها بالضد، و ذلك أن المتصل قد ينقسم بلا نهاية؛ غير أنه في العظم ليس يكون غير متناه. لأنه بأي مقدار كان يمكن أن يكون بالقوة، فإنه بذلك المقدار يمكن أن يكون بالفعل. فإذا ليس يوجد أصلا مقدار محسوس غير متناه، فليس يمكن أن يكون يفضل على كل مقدار محدود، لأن ذلك لو جاز لقد كان سيكون ما هو أعظم من السماء.(الطبيعة (أرسطو)، جلد: ۱، صفحه: ۲۶۳)

در کلمات سایرین:

و الجواب: أنّ النهاية إمكان القسمة خاصّة للأجسام كلّها. و كما لا يلزم من اشتراك الكلّ و الجزء في الجسميّة اشتراكهما في خصوص المقدار، كذلك لا يلزم من اشتراكهما في خاصّة الجسم، و هي النهاية إمكان القسمة، اشتراكهما في خصوص المقدار. سلّمنا أنّ الشيئين إذا اشتركا في عدم التناهي اشتركا في عدم التواتي، و لكن لا نسلّم أنّ الغير متناهية حاصلة بالفعل. أمّا إذا كانت بالقوّة فلا، كيف و الوجود يكذّبه.

الترى أنّ الفولاذ المتضاعفة إلى غير النهاية بالقوّة و الإمكان فيها من المئات الغير المتناهية بالقوّة عشرة أمثالها، و من العشرات مائة أمثالها، مع أنّ كلّ عدد دقع من الثلاثة غير متناه بالقوّة؛ بمعنى أنّا إلى أيّ حدّ انتهينا في العدد أمكن الزيادة عليه؛ لكن لمّا لم تكن هذه الفولاذ الغير المتناهية حاصلة بالفعل، لم يلزم من الاشتراك في اللانهاية التساوي في الأعداد(حکمة الإشراق (تعلیقه علی صدرا)، جلد: ۱، صفحه: ۳۲۲)

السادس أن العدد ليس بمتناه و معناه أنه ال توجد مرتبة من العدد إلا و يمكن فرض ما يزيد عليها و كذا فرض ما يزد على الزائد و ال تقف السلسلة حتى تنقطع بانقطاع الاعتبار و يسمى غير المتناهي اللايقفي و ال يوجد من السلسلة دائما بالفعل إلا مقدار متناه و ما يزيد عليه فهو في القوة و أما ذهاب السلسلة بالفعل إلى غير النهاية على نحو العدول دون السلب التحصيلي فغير معقول فالكل و ال مجموع لغير المتناهي بهذا المعنى و ال تحقق فيه لشيء من النسب الكسرية كالنصف و الثلث و الربع و إلا عاد متناهيا. (نهایة الحکمة، ص ۱۱۲-۱۱۳)

[7] برشی از مقاله گردآوری «مثال دقیق، سؤال روان؛ ابزاری برای ارائه مجردات به همگان».

[8] نمونه‌ای از تلاش برای عینی سازی بهشت کانتور را در مقاله گردآوری «مثال دقیق، سؤال روان؛ ابزاری برای ارائه مجردات به همگان» ملاحظه می‌کنید.

[9] I would say, `I wouldn't dream of trying to drive anyone from this paradise.' I would do something quite different: I would try to show you that it is not a paradise — so that you'll leave of your own accord. I would say, `You're welcome to this; just look about you.' . . .
For if one person can see it as a paradise . . ., why should not another see it as a joke?) (Ludwig Wittgenstein)(The Infinite)

[10] راسل می‌گوید که در اواخر نخستین نیمسال تحصیلی، وی‌تگنشتاین در ۱۹۱۲ او پرسید: من یک احمق تمام عیارم یا نه؟ اگر بلی هواندرد خواهم شد و اگر نه فیلسوف. راسل در پاسخ پیشنهاد کرد که او در طی تعطیلات مقاله‌ای در باب یک موضوع فلسفی بنویسد. وقتی او در آغاز نیمسال جدید مقاله را به راسل نشان داد، او یک جمله از آن را خواند و گفت: نه تو نباید هواندرد شوی!(لودویگ وی‌تگنشتاین، ص ۱۲)

[11] جلسه سی و دوم فقه هوش مصنوعی

ج) تبیین نظریه کانتور

دسته بندی کانتور

«بهشت کانتور، بحث راجع به مجموعه های بی نهایت ها و دسته بندی مراتبشان و اعداد ترانسفینی است.

۱. «الف صفر»: مجموعه اعداد طبیعی و...

 ایشان مجموعه ها و بی نهایت بودنشان را رده بندی کرده است به همان حرف الفبای عبری[1]، اولین قوه بی نهایت را که اعداد طبیعی هستند اسمش را گذاشته است: «الف صفر».

[در این کتابهای منطق ریاضی می‌گویند بی‌نهایت اُمگا[2]. اُمگا، آخرین حرف است[3]. یعنی پایین‌ترین بی‌نهایت. اولین بی‌نهایتی که از نظر قوت بی‌نهایتی از همه کمتر است، همان الف صفر است. اینها اعداد بی‌نهایت ها است. یعنی همانطوری که عدد یک و دو داریم، بی‌نهایتها هم درجه بندی دارد. پایین‌ترین بی‌نهایت، الف صفر است که همان بی‌نهایت امگا است[4].]

«الف صفر»، کاردینالش یک کاردینالی ست که اولین درجه ی بی نهایت است.الف صفر، در اعداد ترانفسینی شروع کار است بعد هم اثبات می کند که به برهان قطری کانتور[5] معروف است، برهان خیلی خوبی است.آتئیست ها هم از این برهان برای مقاصد پوچ خودشان استفاده می کنند. در مقاله باخدایی گام به گام عرض کردم. هم استدلال آن ها را آوردم و هم عرض کرده ام که ربطی به مقصود آن ها ندارد[6].

علی ای حال با برهان قطری -در همین کتاب تاریخ ریاضیات هم هست- چه چیزی را ثابت کرده است؟ یک چیز عجیب؛ می گوید:شما بین دو و سه در مجموعه اعداد طبیعی، عددی دیگر پیدا نمی کنید. بینش چیزی نیست.اما هر دو عدد گویای بینش دوباره بی نهایت عدد گویای پیدا می کنید.این چیز کمی است؟! چه قدر گسترده می شود. در عین حال همین آقای کانتور در برهان خودش اثبات کرده که توان بی نهایتی مجموعه اعداد گویا با این فشردگی با توان بی نهایتی مجموعه اعداد طبیعی که می شمریم برابر است. لذا می گوید هر دو شمارا هستند شمارا یعنی تناظر یک به یک دارند.تناظر یک به یک در بی نهایت ها.

۲. «الف یک»: مجموعه اعداد حقیقی

اما وقتی می رسد به مجموعه اعداد حقیقی می گوید نه دیگر.توان بی نهایتی مجموعه اعداد حقیقی که اعداد گنگ هم در آن هست، بیش از «الف صفر» است لذا اسمش را گذاشته است: «الف یک».«الف یک» می شود مجموعه اعداد حقیقی که این همه گستردگی و این همه مباحث برایش مطرح شده است.می گویند: مجموعه اعداد حقیقی، به اندازه کافی فشرده است؛
یعنی غیر از این که هر دو نقطه اش بینش بی نهایت نقطه و عدد هست، هیچ جای خالی هم بینش

نمی تواند پیدا کند و لذا نامشمار است. کانتور برهان خلف اقامه می کند که «الف یک» مجموعه اعداد حقیقی نامشمار است. یعنی دیگر با اعداد طبیعی هم قوه نیستند. [یعنی خطی که اعداد حقیقی است، اعداد طبیعی و شمارش نمی‌توانند آن‌ها را بشمارد[7]]

از همین برهان خلف کانتور، یک مبنای فلسفه ریاضی پیدا شده است[8].

مبانی سه گانه در فلسفه ریاضیات

سه تا مبنا هست در منطق ریاضی و فلسفه ریاضی که زیاد از آن اسم می برند:

۱. صورت گرایی[9] فرمالیسم،

۲. منطق گرایی [10]Logicism،

۳. یکی هم شهودگرایی مال بروار[11].

شهودگرایی همین است. می گوید: برهان خلف کانتور را در اثبات «الف یک»، مجموعه اعداد حقیقی قبول ندارم.باید حتماً بسازیم تا اثبات کنیم. به صرف برهان خلف اثبات نمی شود.این ها هم بحث های خوبی است که در قرن بیستم انجام شده است[12].»

---

[1] الفبای عبری از ۲۲ حرف تشکیل شده‌است. صداهای زیر شیوهٔ تلفظ حروف عبری هستند

آلِف ? -- بِت ? – وِت ? -- گیمل ? – دالِت ? – هِ? – واو ? – زایین ? – خِت ? – تِت ? – یُد ? – کاف ? – خاف ? -- خافْسُفیت ? -- لامِد ? – مِم ? – مِمْسُفیت ? -- نون ? – نون سُفیت ? -- سامخ ? – عایین ? – پِ? -- فِ? -- فِسُفیت ? -- تْسادی ? – تْسادی سُفیت ? -- کُف ? – رِش ? – شین ? – سین ? -- تاو ?

2] Aleph-omega is
? = sup{ ?n | n ? ? } = sup{ ?n | n ? {0, 1, 2, ...} }
here the smallest infinite ordinal is denoted as ?. That is, the cardinal number ?? is the least
pper bound of
?n | n ? {0, 1, 2, ...} }.
otably, ?? is the first uncountable cardinal number that can be demonstrated within
ermelo–Fraenkel set theory not to be equal to the cardinality of the set of all real numbers 2?0:
or any natural number n ? 1, we can consistently assume that 2?0 = ?n, and moreover it is
ossible to assume that 2?0 is as least as large as any cardinal number we like. The main
estriction ZFC puts on the value of 2?0 is that it cannot equal certain special cardinals with

ofinality ?0. An uncountably infinite cardinal ? having cofinality ?0 means that there is a :ountable-length) sequence ?0 ? ?1 ? ?2 ? ... of cardinals ?i < ? whose limit (i.e. its least upper ound) is ? (see Easton's theorem). As per the definition above, ?? is the limit of a countable-length equence of smaller cardinals.(Wikipedia)

?عدد ترتیبی مجموعه اعداد طبیعی N ، با رابطه کوچکتر ای مساوی معمولی، را معمولاً با حرف ?ونانی امگا ?نشان میدهند؛ یعنی:

? =ord(1,2,3,…) (آشنایی با نظریّه مجموعهها و کاربردهای آن، ص ۱۶۹)

بررسی اعداد اردینال به تعاریف مقدمات زیادینیاز دارد وما آنها را به صورت فشرده ای اینجا بیان می کنیم :

در تمام این بحث صفر را هم عضوی از اعداد طبیعی در نظر میگیریم.

مجموعه خوش ترتیب: یک مجموعه همراه با یک رابطه ترتیب را خوشترتیب گوییم هرگاه هر زیر مجموعه آن دارای عضو اقل (کوچکترین عضو) باشد. مثل مجموعه اعداد طبیعی.

دو مجموعه مرتب که تنها برچسب گذاری اعضایشان با هم تفاوت دارد را یکریخت ترتیبی (order isomorphic) گوییم، به این معنا که " عضوی از مجموعه اول از عضوی دیگردر این مجموعه کوچکتر باشد اگر وتنها اگر همتای آن عضوی از مجموعه دوم پیدا شود که از عضوی از آن مجموعه کوچکتر است" ، که به این تناظر یک به یک یکریختی ترتیبی (order isomorphism) گویند.مثلا مجموعه های خوش ترتیب {3و2و1} و{16و15و14} یکریخت ترتیبی هستند . یعنی اولین عضو در یک مجموعه برچسب 1 و در مجموعه دیگر برچسب 14 دارد وبه همین ترتیب دومین و سومین عضو .

اکنون می توان با این یکریختی رده های هم ارزی تعریف کرد.که در هر رده همه مجموعه های یکریخت ترتیبی قرار دارند.

اعداد اردینال

اولین تعریف عدد اردینال :یک عدد اردینال مجموعه خوشترتیبی است مثل a که هر عضو آن مثل x برابر با مجموعه عناصری از a باشد که از x کوچکترند.

اعداد اردینال در ریاضیات به زبانهای مختلفی تعریف شده اند،اکنون ما به بررسی مختصر ماهیت آن می پردازیم.

به زبان خیلی ساده اعداد اردینال رده های هم ارزی مجموعه های خوشترتیب را برچسب گذاری می کند.یا هر عدد اردینال یک نمایندهٔ از دستهٔ هم ارزی مجموعه های خوشترتیب را مشخص می کند.

در حالت خیلی ساده مجموعه اعداد طبیعی را در نظر بگیرید ،زیر مجموعه های زیر را در نظر بگیرید

{},{0},{0,1},{0,1,2},.....

(که این زیر مجموعه ها در واقع نمایندهٔ مجموعه های مرتب متناهی هستند)

برای این زیر مجموعه ها دو نوع برچسب گذاری می توانیم انجام دهیم

1. برچسب كارديناليتي كه به هر مجموعه تعداد اعضا (بحث بر روي اندازه مجموعه(size)) را نسبت مي دهدمثال برچسب مجموعه {1و0} عدد 2 خواهد بود.

2. برچسب ارديناليتي كه به هر مجموعه برچسب ترتيب آن مجموعه(بحث روي موقعيت اعضا position) را مي زند ، توجه داريم كه اين مجموعه ها نمايندهٔ رده هاي ترتيبي مجموعه هاي مرتب متناهي هستند مثال مجموعه{2و1و0} نمايندهٔ همه مجموعه هاي ترتيبي 3 عضوي است.البته در حالت متناهي اين دو نوع برچسب گذاري يكسان هستند(چون هر دو مجموعه ترتيبي متناهي با تعداد اعضاي يكسان يكريخت ترتيبي هستند). اما در حالت ان متناهي كامل متفاوتند .

خب پس تا اينجا اعداد ارديناليتي متناهي به صورت زير تعريف شده اند(كه در اين حالت همان اعداد طبيعي هستند)

0,1,2,3,....

كه برچسب مجموعه هاي خوشترتيب و متناهي زير هستند:

{ } ,{0} ,{0,1} ,{0,1,2},.....

به طور مثال عدد ارديناليتي 26 يعني مجموعه خوشترتيب {25و.....و1و0}

پس باراي مجموعه هاي مرتب متناهي كه اعداد ارديناليتي (كه گاهي باراي سادگي فقط مي گويند ارديناليتي) چيز جديدي نيستند.اما در حالت انامتناهي وضع به كلي فرق ميكند به هر مجموعه انامتناهي تنها يك برچسب اندازه (كارديناليتي)دارد اما يك مجموعه خوش ترتيب انامتناهي مي تواند چند رده خوشترتيب غير يكريخت داشته باشد.

در واقع گسترش و توسيع برچسب اندازه باراي مجموعه هاي انامتناهي منجر به تعريف كارديناليتي يك مجموعه و گسترش و توسيع برچسب ترتيب مجموعه هاي انامتناهي منجر به تعريف ارديناليتي يك مجموعه مي شود.

مجموعه همه اعدادطبيعي {...و4و3و2و1و0} كه يك مجموعه انامتناهي و خوشترتيب است اولين عدد ارديناليتي انامتناهي را مشخص ميكند كه آنرا با ? نمايش ميدهيم .

اعداد ارديناليتي را ميتوان با هم جمع، ضرب يا به توان رساند، اما جمع و ضرب آنها لزوما خاصيت جابجايي ندارند يعني مثال ? =1+? ولي اين اكيدا كوچكتر از ?+1 هست و ? برابر2ضربدر هستش.اما اكيدا كوچكترازاز?.2 هست (نحوه جمع و ضرب اين اعداد را مي توانيد در مراجع مشاهده كنيد).وداريم

?={0,1,2, ...}

?+1={0,1,2,....,?

.....

كه عددصلي همه مجموعه هاي اخير همان عدد اصلي اعداد طبيعي (الف نات)هستش و مجموعه همه اعداد ارديناليتي شمارا را با
?1نشان مي دهيم وعدد اصلي آن الف يك هست.و اين اولين عدد ارديناليتي ناشماراست.

اكنون مى توان ايي مجموعه اه ور ادامه داد ومجموعه خوشترتيب اعداد اردينال مجموعه زير خواهد شد

$1, 2, \ldots, \omega, \omega+1, \omega+2, \ldots, \omega+\omega, \omega+\omega+1, \ldots$

مثال ? يعنى مجموعه همه اردينالهاى متناهى و 3 يعنى برچسب همه3 عضوى هاى خوشترتيب والى آخر

بحث اردينالها يك بحث فوق العاده پركاردر نظريه مجموعه هاست كه تعريف هاى آن در رياضيات با ابزارهايى مثل توپولوژى ، نيز آمده است و من هرچه مينويسم باز هم ميبينم قسمتهاى زيادى براى گفتن مانده براى مطالعه بيشتر به آدرسهاى كه درپايان مطلب خواهم گذاشت مى توانيد مراجعه كنيد.

در نهايت تعريف جان فون نويمان رياضيدان معاصر را از عدد اردينال ذكر ميكنيم كه مى توانيد انطباق تعاريف بالا از عدد اردينال را با تعريف فون نويمان در مثال زير تعريف ببينيد.(زندگى با رياضيات، مقاله آشنايى با اعداد اوردينال)

در اين زمينه همچنين: Why is ? the smallest ??

بايد توجه داشت كه كانتور علاوه‌بر بيان مجموعه اعداد ترانفسينى، از مفهومى با عنوان نامتناهى مطلق اى absolute infinite با نماد حرف بزرگ امگا (?)ياد مىكند كه بسط و توسعه مفهوم نامتناهى است و با مجموعه بينهايت امگا متفاوت است.((absolute infinite

[3] اومگا (بزرگ: ?، كوچك: ?; يونانى ?????) بيست و چهارمين حرف الفباى يونانى است. و در دستگاه شمارش يونانى مقدار ۸۰۰ را دارد. نام اين حرف به معنى اوى بزرگ است (? مگا، مگا به معنى بزرگ است)، كه در مقابل ميكرون است "little O" (به معناى اوى كوچك).

[4] جلسه شرح توحيد صدوق، تاريخ 26/9/1398.

[5] در نظريه مجموعه‌ها، استدلال قطرى كانتور در سال ۱۸۹۱ توسط گئورگ كانتور به عنوان يک اثبات رياضى ارائه گرديد و نشان داد مجموعه‌هاى نامتناهى وجود دارند كه اعضاى آنها در تناظر يک به يک با مجموعه اعداد طبيعى نيستند. چنين مجموعه‌هايى را «مجموعه ناشمارا» مينامند.

مجموعه غيرقابل شمارش

كانتور، در مقاله‌ى خود در سال ۱۸۹۱، مجموعه T را مطالعه كرد كه شامل همه دنباله‌هاى رقمهاى دودويى (يعنى هر رقم صفر يا يک) باشد. او با اثباتى ساختى از قضيه زير شروع مىكند:

اگر s1, s2, ... , sn شامل تمامى شمارشهاى ممكن از T باشد، آنگاه همواره عضوى از T وجود خواهد داشت كه در بين s1,S2,... نخواهد بود.

براى اثبات اين، مجموعه‌هايى از T را به شكل زير انتخاب مينماييم:

s1 =	(۰,	۰,	۰,	۰,	۰,	۰,	۰,	...)
s2 =	(۱,	۱,	۱,	۱,	۱,	۱,	۱,	...)
s3 =	(۰,	۱,	۰,	۱,	۰,	۱,	۰,	...)

s4 = (۱, ۰, ۱, ۰, ۱, ۰, ۱, ...)
s5 = (۱, ۱, ۰, ۱, ۰, ۱, ۱, ...)
s6 = (۰, ۰, ۱, ۱, ۰, ۱, ۱, ...)
s7 = (۱, ۰, ۰, ۰, ۱, ۰, ۰, ...)
...

او ساختار توالی s را با انتخاب مکمل اولین رقم در s1 انتخاب نمود (جایگزینی صفر به جای یک و برعکس)، برای انتخاب دومین رقم S به سراغ رقم دوم در s2 رفت و مکمل آن را انتخاب نمود و به همین ترتیب ادامه داد. در مثال فوق به نتایج زیر میرسیم:

s1 = (۰, ۰, ۰, ۰, ۰, ۰, ۰, ...)
s2 = (۱, ۱, ۱, ۱, ۱, ۱, ۱, ...)
s3 = (۰, ۱, ۰, ۱, ۰, ۱, ۰, ...)
s4 = (۱, ۰, ۱, ۰, ۱, ۰, ۱, ...)
s5 = (۱, ۱, ۰, ۱, ۰, ۱, ۱, ...)
s6 = (۰, ۰, ۱, ۱, ۰, ۱, ۱, ...)
s7 = (۱, ۰, ۰, ۰, ۱, ۰, ۰, ...)
...
s = (۱, ۰, ۱, ۱, ۱, ۰, ۱, ...)

با ساخت s به روش فوق به مجموعه‌ای میرسیم که با تمامی مجموعه‌های بالا متفاوت است زیرا عنصر n ام آن با عنصر n ام تمام مجموعه‌های بالا تفاوت دارد.

بر اساس این قضیه کانتور با استفاده از یک اثبات با تناقض نشان میدهد که:

مجموعه T غیرقابل شمارش است.

او برای اثبات تناقض در ابتدا فرض میکند T شمارا است. پس همه عناصر آن به شکل s1,s2,...sn قابل نمایش هستند. با اعمال قضیه قبلی به این شمارشها به توالی s میرسیم که در شمارشها موجود نیست. اما s عنصری از T بود و بنابراین باید در شمارشها باشد. این تضاد فرض اصلی را زیر سؤال میبرد بنابراین T غیرقابل شمارش است.(سایت ویکی پدیا) همچنین ملاحظه کنید: Universality and the Liar: An Essay on Truth and the Diagonal Argument

تصویر روشنتری از این برهان را در اینجا میتوانید مشاهده کنید.

در زمینه کاربرد برهان قطری در مباحث حکمت نیز مطالعه مقاله «بررسی اهمیت فلسفی برهان قطری کانتور» سودمند است.

[6] این بخش از مقاله با خدایی گام به گام را در فصل دوم این نوشتار ملاحظه خواهید کرد.

[7] جلسه شرح توحید صدوق، تاریخ 26/9/1398

[8] سه فلسفه اصلی ای مکتب تفکر در رابطه با مبانی ریاضیات پیدا شده است به اصطلاح مکتب منطق گرا، مکتب شهودگرا و مکتب صوری گرا .طبیعی است که هر فلسفه نوین مبانی ریاضیات باید ، به نحوی، با بحران کنونی درمبانی ریاضیات مقابله کند . در بخش آتی به طور

مختصر این سه مکتب فکری را مورد بررسی قرار داده و متذکر خواهیم شد که چگونه هر یک از اینها راهی برای مواجهه با تعارضهای نظریه عام مجموعه ها در پیش پا می گذارد. (تاریخ ریاضیات، ج ۲، ص ۳۲۰)

[9] تز صوری گرا این است که ریاضیات با دستگاه های نمادی صوری سر و کار دارد. در واقع ریاضیات مجموعه ای از آن مباحث مجرد تلقی می شود که در آن اصطلاحات صرفا نمادهایی هستند و احکام قواعدی متضمن این نمادها. پایه غائی ریاضیات در منطق قرار ندارد و بلکه تنها در مجموعه ای نشانه ها و نمادهای پیش منطقی و در مجموعه ای از اعمال با این نشانه ها واقع است. چون از این دیدگاه، ریاضیات عاری از محتوای ملموس و تنها شامل عناصر نمادی آرمانی است، برقراری سازگاری شاخه های مختلف ریاضیات قسمت مهم و لازمی از برنامه صوری گرایی می شود. بدون همارهای چنین برهان سازگاری، تمام مبحث اساس بی معنی خواهد شد. در تز صوری گرایی اصل موضوعی ریاضیات در بیشترین حد دنبال می شود.

مکتب صوری گرایی توسط داوید هیلبرت بعد از اتمام کارش در بررسی اصل موضوعی هندسه تاسیس شد. در مبانی هندسه اش 1899 هیلبرت روش ریاضی را از قالب مبحث اصل موضوعیهای مادی اقلیدس به قالب دقیق تر مبحث اصل موضوعیهای صوری کنونی در آورده بود. دیدگاه صوری گرا بعدا برای مقابله با بحران ناشی از پارادوکسهای نظریه مجموعه ها و به مبارزه طلبیدن ریاضیات کلاسیک به دلیل انتقادهای شهودگرایانه، به وسیله هیلبرت ایجاد شد. گرچه هیلبرت پیش از سال 1904 اصطلاحات صوری گرایانه را به کار برده بود تا بعد از سال 1920 وی و همکارانش برنیس، آکرمان، فون نویمان، و دیگران کار جدی را درباره آنچه امروزه برنامه صوری گرا نامیده می شود آغاز نکردند.

 توفیق ای شکست برنامه هیلبرت برای نجات ریاضیات کلاسیک در گرو حل مسئله سازگاری است. بری بودن از تناقض تنها به کمک برهان های ناسازگاری تضمین می شود و برهان های ناسازگاری قدیمی تر مبتنی بر تعابیر و مدل هایی است که مسئله سازگاری را از یک حوزه ریاضیات به حوزه دیگر منتقل می کند. به عبارت دیگر یک برهان سازگاری به روش مدلها صرفا برهانی نسبی است. بدین جهت هیلبرت روش مستقیم جدیدی برای مسئله سازگاری تدبیر کرد. بسیاری شبیه به اثبات انچه وضعیت هایی خاص در یک بازی بنابر قواعد آن نمی توانند در بازی پیش آیند هیلبرت امید آن را داشت تا به کمک مجموعه مناسبی از قواعد عمل برای به دست آوردن فرمول های قابل قبول از نمادهای اساسی ثابت کند که فرمول متناقضی هرگز پیش نمی آید. با نمادهای منطقی یک فرمول متناقض فرمولی که از نوع " F و نه F " است که در آن F فرمول پذیرفته شده ای از دستگاه است. اگر بتوان نشان داد که چنین فرمول متناقضی ممکن نیست آنگاه سازگاری دستگاه ثابت شده است.

 بسط افکار فوق برای آزمون مستقیم سازگاری دری ریاضیات توسط هیلبرت، نظریه برهان نامیده شد. برای دستگاه های مقدماتی معینی برهانی سازگاری فراهم شدند که آنچه را هیلبرت میل به انجام آن برای همه ریاضیات کلاسیک داشت نشان می دهد ولی در کل مسئله ناسازگاری برای دستگاه بدون چاره ماند.

 در حقیقت برنامه هیلبرت حداقل به شکلی که در اصل در ذهن او بود ظاهرا محکوم به شکست بود این حقیقت توسط کورت گودل در سال 1931 عملا قبل از انتشار مبانی ریاضی، آشکار شد. گودل به کمک روش های بی ایراد و قابل قبول برای پیروان هر یک از سه مکتب اصلی فلسفه ریاضیات نشان داد که برای دستگاه قیاسی که به حد کافی قوی شده باشد نظیر دستگاه هیلبرت برای همه ریاضیات کلاسیک اثبات سازگاری دستگاه به کمک روش های متعلق به خود آن دستگاه میسر نیست. این قضیه قابل توجه پیامد قضیه اساسی تری داشت گول ناکامل بودن دستگاه هیلبرت را ثابت کرد یعنی وی وجود مسائل "تصمیم ناپذیر" را در داخل دستگاه که

سازگاری دستگاه از آن جمله است نشان داد. این قضایا نشان می دهند که دستگاه های ریاضی که برای استخراج ریاضیات من اسب شناخته شده اند قابل اطمینان نیستند بدین معنی که سازگاری آنها را نمی‌توان با روش های متناهی داخل دستگاه صوری شده اند ثابت کرد و حال آنکه هر دستگاهی که از این لحاظ مطمئن تشخیص داده شده انمناسب است.(مقاله صوری گرایی در ریاضیات استفاده شده از مطالب کتاب تاریخ ریاضیات)

[10] پئانو نظریه ی اعداد طبیعی را اصل موضوعی ساخت و قدم اصلی را برای حسابیدن ریاضیات، یعنی تحویل ریاضیات به حساب، برداشت. وی سه مفهوم اولیه صفر، عدد و تالی را ارائه کرد (مقصود از عدد، عدد طبیعی و منظور از تالی، عدد بعدی در ترتیب طبیعی بود، مثلاً یک تالی صفر است، دو تالی یک است و قس علی هذا). سپس پنج اصل موضوع زیر (موسوم به اصول پئانو) را وضع کرد:

الف) صفر یک عدد است.

ب) تالی هر عدد، یک عدد است.

ج) صفر تالی هیچ عددی نیست.

د) هیچ دو عدد متفاوتی دارای تالی برابر نیستند.

ه) هر خاصیتی که به صفر و به تالی هر عدد دارای آن خاصیت متعلق، باشد، به همه اعداد متعلق است (اصل استقرای ریاضی). به این ترتیب می توانیم رشته اعداد طبیعی را با شروع از صفر و گذر از یک عدد مانند n به تالی آن یعنی s(n در دست داشته باشیم.

جمع به سادگی قابل تعریف است. در واقع به ازای هر m ، عدد 0+mرا برابر m قرار می دهیم و اگر m+n داده شده باشد،(m+s(nرا برابر تالی m+n یعنیs(m+n) تعریف می کنیم. ضرب نیز به طور مشابه تعریف می شود و به دنبال آن می توان همه قضایای حساب (مقدماتی) را اثبات نمود. کار پئانو اراداتی داشت، از جمله این که دستگاه قیاسی وی قابلیت پذیرفتن تعدادی نامتناهی تعبیر را داشت. یک تعبیر این است که صفر را به معنی صد، عدد را به معنای اعداد طبیعی بزرگتر ای مساوی صد و تالی را به معنای معمولی آن می گیریم. در این صورت هر پنج اصل موضوع پئانو، احکام صادقی خواهند بود (توجه کنید که صد تالی نود و نه نیست زیرا در این الگو نود و نه عدد نیست!).

بر طبق نظر راسل، در دستگاه پئانو چیزی برای تمیز دادن الگوهای متفاوت وجود نداشت. اما می دانیم « صفر» چه باید باشد، به ویژه نمی خواهیم به معنای صد باشد. دستگاهی که در آن صفر به معنای صد است به درد زندگی نمی خورد. می خواهیم اعدادمان چنان باشند که بتوانند برای شمارش اشیای معمولی به کار روند.

در 1884 فرگه به منطقیدن حساب، یعنی تقلیل حساب به منطق (و با توجه به کار پئانو، در واقع منطقیدن ریاضیات) همت گماشت و اولین مکتب ریاضی را به نام منطق گرایی، که به عقیده ی کواین یک رهیافت افلاطون گرایانه به ریاضیات بود، تأسیس کرد . هدف این مکتب تحویل ریاضیات به منطق بود، یعنی اثبات این که ریاضیات شاخه ای از منطق (جدید و نه سنتی) است.

به زعم فرگه عدد چیزی است که مشخصه اعداد است همان طور که انسان مشخصه انسان ها است. یک عدد خاص مانند 3 نمونه ای از عدد است و یک گروه سه نفری نمونه ای از عدد 3 است، و نه عدد. خود عدد

3 چیزی است که بین همه ی گردآیه های سه عضوی مشترک است. فرگه صفر را گردآیه ی متشکل از مجموعه ی تهی، 1 را گردآیه ی متشکل از همه مجموعه های تک عضوی، 2 را گردآیه متشکل از همه ی مجموعه های دو عضوی و ...تعریف کرد.

با این حال همه ی این ها، توسط راسل دوباره کشف شد. در واقع منطق گرایی در حدود 1910 توسط راسل و وایتهد تنقیح شد. این دو نفر سعی کردند نشان دهند تمام ریاضیات کلاسیک که تا آن زمان شناخته شده بود از نظریه ی مجموعه ها و این نظریه در جای خود از اصول موضوع مذکور در کتاب اصول ریاضیات آن ها مشتق می شود و بالاخره که این اصول موضوع متعلق به منطق هستند.

آن ها در ارائه ی منطق گرایی نظریه ی انواع و اصل تقلیل پذیری را به کار بردند. اما برنامه ی آن ها ناقص بود، زیرا مثلاً این اصل موضوع که مجموعه های نامتناهی وجود دارند یک حکم منطقی (یعنی حکمی با عمومیت کامل که صدقش در پرتو صورتش باشد نه محتوایش) نبود. در واقع پذیرش این اصل به خاطر آشنایی ما با مجموعه های نامتناهی مانند مجموعه اعداد طبیعی یا مجموعه نقاط فضای سه بعدی بود، یعنی بر مبنای مضمون این اصل، نه صورت آن. همین وضعیت در مورد اصل انتخاب نیز برقرار بود. مشکل دیگر این بود که فرآیند استخراج قضایا از اصول منطق، طویل، پیچده و مالال آور بود و با دید شهودی ما از ریاضیات منطبق نبود. به این ترتیب، منطق گرایی در ارائه قواعد و اصول زیر بنایی ریاضی شکست خورد.(سایت راسخون، مقاله منطق گرایی در ریاضیات)

[11] تز شهودگرا آن است که ریاضیات باید منحصراً به توسط يك عده تناهی از روشهای سازنده درباره دنباله اعداد طبیعی که به طور شهودی در نظر گرفته شده اند بنا شود. لذا مطابق این نظر در زیربنای ریاضیات شهود اولیه ای قرار دارد که بدون تردید با حس گذرایی قبل و بعد در وجود ما همراه است و به ما اجازه می دهيك چیز واحد، سپس یکی دیگر سپس یکی دیگر و همینطور تا به طور بی پایان را تصور کنیم. بدین ترتیب دنباله های بی انتها را به دست می آوریم که معروفترین آنها دستگاه اعداد طبیعی است. از این مبنای شهودی دنباله اعداد طبیعی هر شی ریاضی دیگر را باید به يك روال سازنده بنا کرد و در آن تعدادی متناهی از مراحل ای اعمال را به کار برد در تز شهود گرا بسط ریاضیات از لحاظ تکوینی تا سر حد امکان دنبال می شود.

مکتب شهودگرا) به عنوان يك مكتب (در حدود سال ۱۹۰۸ به توسط ریاضیدان هلندی ل . ا . ی . بر اوئر آغاز شد ولی برخی مفاهیم شهودگرایانه قبلا توسط کسانی چون کرونکر در سالهای (۱۸۸۵) و پوانکاره (۱۹۰۲ - ۱۹۰۶) ابراز شده بود. این مکتب با گذشت زمان تدریجاً تقویت شده، برخی از ریاضیدانان برجسته کنونی را به خود جلب کرده و تأثیر فوق العاده ای در تمام افکار مربوط به مبانی ریاضیات گذاشته است.

برخی از پیامدهای تز شهودگرا جنبه انقلابی دارند. مثلاً پافشاری بر روشهای سازنده به تصوری از وجود در ریاضیات منجر میشود که آن چیزی نیست که همه ریاضیدانان به آن اعتقاد داشته باشند برای شهودگرایان ، **هستیی که اثبات وجود آن لازم است باید در تعدادی مراحل متناهی ساختنی باشد کافی نیست که فرض عدم وجود آن هستی منجر به تناقض شود**. این بدان معنی است که بسیاری از براهین وجودی زیادی که در ریاضیات کنونی دیده میشوند برای شهودگرایان قابل قبول نیستند.

مورد مهمی از پافشاری شهودگرایان بر روشهای سازنده نظریه مجموعه هاست. از نظر شهودگرايان يك مجموعه را نمی توان به عنوان گردایه ساخته و پرداخته ای تصور کرد بلکه باید آن را به عنوان قانونی تلقی کرد که به کمک آن عناصر مجموعه را بتوان به يك روال قدم به قدم بنا کرد. این مفهوم مجموعه امکان وجود مجموعه های تناقض آمیزی مانند مجموعه همه مجموعه ها » را رد می کند. (تاریخ ریاضیات، ج ۲، ص ۳۲۴)

در این زمینه همچنین مراجعه کنید به سایت بریتاینکا: مقاله Logicism, intuitionism, and formalism

[12] جلسه سوم تاریخ اجمالی ریاضیات؛ بحران‌ها و مسائل