کاربرد مفاهیم ریاضیاتی در تبیین معارف الهیاتی(۲): «نظریه مجموعه ها و برهان قطری کانتور»

نوشته پیش رو، تنظیم و گردآوری مطالبی است که در جلسات مختلف از جمله جلسات هشتم، یازدهم و سی و دوم فقه هوش مصنوعی و جلسه شرح توحید صدوق تاریخ 26/9/1398 و جلسه اول و سوم مرور اجمالی تاریخ ریاضیات افاده شده است. علاوه‌بر افادات، از متن مقاله باخدایی گام به گام در فصل دوم و تقریرات شرح این مقاله که در جلسات خارج اصول فقه به تناسب مطرح شده است بهره برده‌ایم.

- فصل اول: مقدّمات
  - الف) اعداد و مجموعه های آن
  - ب) کانتور؛ نظریّات و بازتاب آن
  - ج) تبیین نظریه کانتور
- فصل دوم: نظریات کانتور؛ دستاویز ملحدین

    - محال بودن دانستن مجموعه تمام حقایق
    - استدلال ملحدین
    - پاسخ نقضی
    - پاسخ حلی
    - بررسی فقرات استدلال
    - بررسی سه بحث باقی مانده
    - آیا وجود یک دانای مطلق (علیم) ممکن است؟

- فصل سوم: شرح و بسط مطالب فصل دوم
    - مقدمه: برهان‌های ریاضی؛ معضلات ریاضی
    - پارادوکس های نظریه مجموعه ها؛ استفاده ابزاری آتئیست ها
    - تبیین اوسعیت نفس الامر از وجود
    - پاسخ به شبهه ملحدین

فصل اول: مقدّمات

الف) اعداد و مجموعه های آن

الف) اعداد و مجموعه های آن

۱. مجموعه اعداد طبیعی

«از مطالب خیلی ساده، این است که مثلاً[1] مجموعه اعداد طبیعی[2] که از یک شروع می‌شود و تا بی‌نهایت می‌رود. بین دو عضو از این مجموعه، دیگر نمی‌توانید چیزی از اعداد طبیعی پیدا کنید. وقتی سر و کارتان با اعداد طبیعی است، بین دو و سه، چه عددی است؟ هیچی. بعد از دو، سه است و بین آن‌ها چیزی نیست. همچنین اعداد صحیح مثبت و منفی. تمام اعداد صحیح به این صورت است، یعنی بین دو عضو از یک مجموعه، عضو دیگری نیست.

۲. مجموعه اعداد گویا

اما وقتی سراغ اعداد گویا[3] می‌رویم، تعبیر بسیار مهم و اعجاب‌آوری است؛ وقتی آدم به آن فکر می‌کند واقعاً به‌تش می‌گیرد. مجموعه اعداد گویا چیست؟ یعنی آن عددی که از نسبت بین دو عدد حاصل می‌شود. الآن بین یک و دو، عددی نداشتیم، اما می‌گوییم یک دوم؛ یعنی نصف. دو سوم، سه چهارم. یعنی همین فاصله‌ای که بود، دو و یک سوم؛ بین دو و سه داری عدد پیدا می‌کنید. این‌ها اعداد نسبی می‌شوند. اعدادی که مُنطَق و گویا هستند.

مجموعه اعداد گویا؛ فشرده

چیز عجیب و غریب این است که ریاضی‌دان‌ها می‌گویند: مجموعه اعداد گویا فشرده است[4]. این فشرده یعنی چه؟ خیلی مهم است. فشرده یعنی هر دو عدد گویا در هر کجا پیدا کنید، نه تنها بین آن‌ها فقط یک عدد نیست، بلکه دوباره بی‌نهایت عدد گویا است؛ خیلی است. اگر دو عدد گویا مثلاً یک دوم با یک سوم را با کسرها مدام به هم نزدیک کنید، بی‌نهایت جلو بروید و به جایی برسید که تصورش سخت است، باز بین آن دو عدد گویا، بی‌نهایت عدد گویا است. وقتی فکرش را می‌کنید، این فشردگی یک امر به‌آوری است. یعنی دوباره بین هر دو عضو، بی‌نهایت عضو از همان مجموعه هست؛ به این، فشردگی می‌گویند. این درکش ساده است.

مجموعه اعداد گویا؛ شمارا

اما آن‌چه که رهاورد قرن بیستم بود و به‌آور است، این است - با برهانی که در فضای ریاضی ثابت شده - که می‌گویند: این مجموعه‌های اعداد گویا که فشرده است، شمارا‌ست[5]. شمارا به چه معنا است؟ یعنی تا‌نظر یک به یک[6] دارد با مجموعه اعداد طبیعی. از نظر قوّه‌ی بی‌نهایت، با اعداد طبیعی یکی است[7]. به اصطلاح اعداد ترانس‌فینی[8]، هر دویش الف‌ْصفر است.

اعداد طبیعی فشرده نبود؛ بین هر دو عضوش فاصلهای نبود. این مجموعه اعداد طبیعی با اعداد گویایی که بین هر دو عضوش، بینهایت عضو است، از نظر زور بینهایت بودن، یکی هستند. از نظر اعداد بینهایتها، هر دو، الف صفر هستند و شمارا. شمارا یعنی تناظر یک به یک دارد با مجموعه اعداد طبیعی.

- [9]

الف صفر، نام عددهای بینهایتها است. عدد ترانسفینی میگویند؛ اعداد متعالی. الف صفر، اولین آنها است که همان اعداد طبیعی است و هر مجموعه بینهایتی که با اعداد طبیعی بینهایت اول، تناظر یک به یک داشته باشد، شمارا است؛ میتوانیم آن را بشماریم و درجه بینهایت بودنش با درجه اعداد طبیعی قوّتش برابر است.

۳. مجموعه اعداد حقیقی

حال مهم این بود:

مجموعه اعداد حقیقی؛ ناشمارا

مجموعه اعداد حقیقی نا شمارا‌ست. یعنی نمیتوان آن را شمرد؛ تناظر یک به یک ندارند. از اینجا نتیجه میگیریم که مجموعه اعداد گویا هرچند فشرده است، اما به اندازه کافی فشرده نیست؛ تعبیری است که دارند. یعنی ولو بین دو عدد باز بینهایت عدد است، اما باز روی محور، نقاطی را پیدا میکنیم که گویا نیست و گنگ است. در اعداد غیرگویا، هم اعداد رسمپذیر و هم غیررسمپذیر هستند، مثل عدد پی[10] که اصلاً رسمپذیر نیست ای اعداد گنگی که رسمپذیر است، مثل رادیکال دو که با خط‌کش و پرگار نشانش میدهیم؛ میگویند این نقطه را که میبینی، این نقطه، عدد گویا نیست. محال است بتوانید آن را به یک عدد گویا بیان کنید، ولی نقطه آن، این است. پس معلوم شد اعداد گویا که این قدر گسترده است، باز بینهایت عدد داریم که در مجموعه اعداد گویا نیست؛ این خیلی مهم است[11].[12]»

---

[1] نوشته پیش رو، تنظیم و گردآوری مطالبی است که در جلسات مختلف از جمله جلسات هشتم، یازدهم و سی و دوم فقه هوش مصنوعی و جلسه شرح توحید صدوق تاریخ 26/9/1398 و جلسه سوم مرور اجمالی تاریخ ریاضیات افاده شده است. علاوه‌بر افادات، از متن مقاله باخدایی گام به گام در فصل دوم و تقریرات شرح این مقاله که در جلسات خارج اصول فقه به تناسب مطرح شده است بهره بردهایم.

[2] اعداد طبیعی یا اعداد صحیح مثبت اعدادی هستند که از یک (۱) شروع میشوند و تا بینهایت (عدد n) ادامه دارند. و شامل صفر نمیشود (عدد صفر مرز میان اعداد مثبت و منفی است) و برای شمارش (به‌طور مثال در «شش سگ روی میز است») و برای ترتیب (به‌طور مثال در «این سومین شهر بزرگ در کشور است») به کار میروند. در اصطلاح‌شناسی ریاضیات، لغت مورد استفاده برای شمارش اشیاء واقعی «اعداد ترتیبی» است. مجموعهٔ اعداد طبیعی همان مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت

یعنی {... و۱٬۲٬۳} است. این اعداد شامل اعداد مرکب، اعداد اول و یک است. به بیان ساده، عدد طبیعی، عددی است که در طبیعت وجود دارد و برای شمردن عناصر طبیعی استفاده می‌شوند، برای مثال عدد صفر یا اعداد منفی در طبیعت وجود ندارند و در مجموعه اعداد طبیعی نیستند.(سایت ویکی پدیا)

[3] عدد گویا یا عدد کسری (به انگلیسی: Rational number) در علم ریاضیات، عددی است که می‌تواند به صورت کسر یا (p / q) از دو عدد صحیح p و q (به طوری که p صورت کسر و q مخرج کسر باشد.) بیان شود. به عبارت دیگر، اعداد گویا کسرهایی هستند که از تقسیم عدد صحیح بر عدد صحیح دیگر (به جز صفر) پدید آمده باشد. از آنجایی که q می‌تواند برابر با عدد یک باشد؛ پس تمامی اعداد صحیح، طبیعی و حسابی، عدد گویا نیز هستند.

نماد ریاضی اعداد گویا

مجموعه اعداد گویا معمولاً با حرف Q نمایش داده می‌شوند که به انتخاب ِجوزپه پئانو از ابتدای کلمهٔ ایتالیایی ِquoziente، به‌معنای خارج‌قسمت، اخذ شده‌است

تعریف

به‌طور کلی می‌توان مجموعه اعداد گویا را بدین صورت تعریف کرد: اگر ما یک عدد طبیعی داشته باشیم و آن را (مثلا x) بر دیگری (مثلا y) تقسیم کنیم؛ به طوری که (یا به شرطی که) هم x (صورت) و هم y (مخرج) عضو مجموعه اعداد صحیح (Z) باشند؛ و y (مخرج) برابر با صفر نباشد؛ آنگاه نسبت x به y (کسر مورد نظر) عددی گویا خواهد بود.

[4] این مجموعه[مجموعه اعداد گویا] خاصیت مهم **چگالی** بودن را دارد. منظور این است که بین هر دو عدد گویای متمایز عدد گویای دیگری در حقیقت بی‌نهایت عدد گویای دیگر - وجود دارد. مثلاً بین ۰ و ۱ اعداد گویای

1/2 .2/3 .3/4 .4/5 .5/6 .....n/(n+1)

قرار دارند، بین ۰ و اعداد گویای

1/3.2/5.3/7.4/9.5/11....n/(2n+1)

قرار دارند. (تاریخ ریاضیات، ج ۲، ص ۳۰۳-۳۰۴)

[5] در ریاضیات، یک مجموعه شمارا است اگر یا متناهی باشد یا بتوان تناظری یک به یک از آن با مجموعه اعداد طبیعی ایجاد کرد.

معادلاً، یک مجموعه شمارا است اگر تابعی یک به یک از آن به اعداد طبیعی وجود داشته باشد؛ یعنی هر عضوی از آن مجموعه باید به عددی طبیعی و اختصاصی مرتبط شود، یا اینکه اعضای آن مجموعه را بتوان یکی یکی شمرد، با اینکه به علت تعداد اعضای نامتناهی، این شمارش هیچگاه نباید پایان یابد.

به بیان حرفه ای تر، با فرض اصل انتخاب شمارا، یک مجموعه شمارا است اگر عدد اصلی آن (تعداد اعضای آن مجموعه) نسبت به مجموعه اعداد طبیعی بیشتر نباشد. به مجموعه شمارایی که متناهی نباشد شمارای نامتناهی می‌گویند.

این مفهوم منتسب به جرج کانتور است، کسی که وجود مجموعه های نامتناهی را اثبات کرد، یعنی مجموعه هایی که شمارا نباشند؛ مثلاً مجموعه اعداد حقیقی.

تعریف

مجموعه‌ای را شمارا (قابل شمارش) می‌نامند، که ای متناهی است یا عدد کاردینال آن با کاردینالیتهٔ مجموعهٔ اعداد صحیح و مثبت یکی است. به مجموعه‌ای که شمارش‌پذیر نیست، مجموعهٔ نامشمارا (مجموعهٔ غیرقابل شمارش) گفته می‌شود. به‌هنگامی که یک مجموعهٔ نامتناهی S شمارش‌پذیر است، عدد کاردینال آن با 0 ? نشان داده می‌شود.(سایت ویکی پدیا)

در این زمینه همچنین به سایت درآمد به منطق، صفحه مجموعه‌های متناهی، نامتناهی، شمارا، نامشمارا و مجله رشد ریاضی، مقاله مجموعه‌های متناهی، نامتناهی، شمارا و نامشمارا مراجعه فرمایید.

[6] در ریاضیات یک تناظر دوسویه (یا تناظر یک به یک) (به انگلیسی: one-to-one correspondence یا bijection) به تابعی میان اعضای دو مجموعه گفته می‌شود به شرط این که هر عضو از هر مجموعه با دقیقاً یک عضو از مجموعه‌ی دیگر جفت شده باشد. در هیچ‌کدام از مجموعه‌ها هیچ عضو بدون جفتی وجود ندارد.

هر تابع دوسویی از مجموعهٔ X به مجموعهٔ Y دارای یک تابع وارون از Y به X است. اگر این دو مجموعه متناهی باشند در این صورت وجود تناظر یک‌به‌یک میان اعضای آن‌ها نشان‌دهندهٔ این است که تعداد اعضای این دو مجموعه برابر است. در مورد مجموعه‌های نامتناهی این تناظرها باعث به وجود آمدن مفهوم اعداد کاردینال شدند که روشی برای بررسی بی‌نهایت‌های متفاوت هستند.

هر تابع دوسویی از یک مجموعه به خود آن مجموعه جایگشت نام دارد.

توابع دوسویی برای بسیاری از مباحث ریاضی ابزاری ضروری هستند. به عنوان مثال: تعاریف یکریختی و همسانریختی.

تعریف

برای این که تابع f از مجموعه X و به مجموعهٔ Y دوسویی باشد باید چهار شرط زیر برقرار باشند:

- هر عضو مجموعهٔ X باید با حداقل یک عضو مجموعهٔ Y جفت‌شده‌باشد،
- هیچ عضو X نباید با بیش از یک عضو Y جفت‌شده‌باشد،
- هر عضو مجموعهٔ Y باید با حداقل یک عضو مجموعهٔ X جفت‌شده‌باشد و
- هیچ عضو Y نباید با بیش از یک عضو X جفت‌شده‌باشد.

شرط‌های یک و دو تضمین می‌کنند که f تابعی با دامنهٔ X است. شرط‌های یک و دو گاهی به صورت یک شرط هم نوشته می‌شوند: باید هر عضو مجموعهٔ X دقیقاً با یک عضو از مجموعهٔ Y جفت شود. توابعی که شرط سوم را دارا هستند توابع پوشا نام دارند. شرط چهارم هم تعریف توابع یک‌به‌یک است. با توجه به این عبارت می‌توان نتیجه گرفت که یک تابع دوسویی است اگر و فقط اگر هم یک‌به‌یک باشد هم پوشا.

مثال

معلم در کلاس به دانش‌آموزان می‌گوید روی صندلی‌ها بنشینند و مشاهده می‌کند همه دانش‌آموزان نشسته‌اند و تمام صندلی‌ها پر هستند و نتیجه می‌گیرد تعداد دانش‌آموزان و صندلی‌ها برابر است. با بررسی ۴ شرط تعریف می‌توان نتیجه گرفت که با جفت کردن هر دانش‌آموز با صندلی‌اش می‌توان تناظر یک‌به‌یک میان دانش‌آموزان و صندلی‌ها ایجاد کرد:

تمام دانش‌آموزان نشسته‌اند (هیچ‌کدام سرپا نیست)،

هیچ دانش‌آموزی روی بیش از یک صندلی ننشسته است.

تمام صندلی‌ها پر هستند و

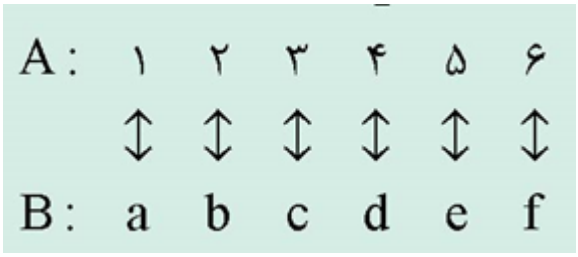
روی هیچ صندلی بیش از یک نفر ننشسته است.

پس میان دانش‌آموزان وصندلی‌ها تناظر یک‌به‌یک برقرار است و در نتیجه تعداد دانش‌آموزان و صندلی‌ها برابر است.

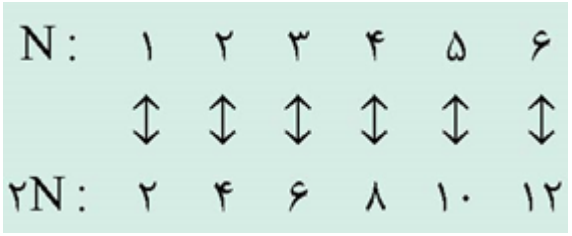
مثال دیگر بازیکنان فوتبال (یا هر ورزش دیگر) و جایگاه آن‌ها در زمین بازی است. اگر ۱۱ بازیکن و ۱۱ جایگاه در ترکیب تیم در نظر بگیریم با جفت کردن هر بازیکن با جایگاهش تناظر به دست می‌آید. چون ۴ شرط فوق برآورده می‌شوند.(سایت ویکی پدیا)

تناظر یک‌به‌یک: اگر A و B دو مجموعه باشند و به ازای هر عضو از A یک عضو از B و به ازای هر عضو از B یک عضو از A وجود داشته باشد، می‌گوییم A و B تناظر یک‌به‌یک دارند و می‌نویسیم: A?B.

برای مثال، اگر فرض کنیم: $A = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ و $B = \{a,b,c,d,f\}$ ، در این صورت واضح است که: A=B. این تناظر یک‌به‌یک را به شکل زیر ملاحظه می‌کنید:



همانطور که در تعریف دقت کردید، مفهوم تناظر یک‌به‌یک بین دو مجموعه A و B هیچ محدودیتی برای نامتناهی بودن این دو مجموعه ایجاد نمی‌کند و اگر این مفهوم را به دقت به‌کار ببریم، به سادگی و به‌صورت زیر می‌توان نشان داد که مجموعه عددهای طبیعی و مجموعه عددهای طبیعی زوج تناظر یک‌به‌یک دارند؛ یعنی: N?۲N



(مجله رشد ریاضی، مقاله مجموعه‌های متناهی، نامتناهی، شمارا و ناشمارا)

[7] تعداد عنصرهای دو مجموعه متناهی X و Y برابر است اگر و تنها اگر یک تناظر یک به یک f: X Y بین X و Y وجود داشته باشد. هرچند که عبارت تساوی تعداد عنصرها را برای حالتی که مجموعه‌های X و Y نامتناهی هستند به کار نمی بریم، به نظر می‌رسد طبیعی باشد فکر کنیم دو مجموعه نامتناهی که در تناظر یک به یک هستند، دارای یک اندازه هستند. ما این ادراک را به‌صورت زیر بیان می‌کنیم:

دو مجموعه X و Y را هم‌توان می‌گوییم و نماد X Y را برای آن به کار می‌بریم، هرگاه بین X و Y یک تناظر یک به یک f: X Y وجود داشته باشد. (نظریّه مجموعه‌ها و کاربردهای آن، ص ۱۲۲)

[8] اعداد ترامتناهی اعدادی نامتناهی‌اند، بدین معنا که آن‌ها بزرگ‌تر از تمام اعداد متناهی‌اند و لزوماً نامتناهی مطلق نیستند. عبارت ترامتناهی (transfinite) توسط جورج کانتور ابداع شد. او می‌خواست که با این کلمه اشاره‌ای ضمنی به کلمهٔ بی‌نهایت کرده باشد، تا بدین شکل بر متناهی نبودنشان اشاره کرده باشد. با این حال برخی از نویسندگان معاصر نسبت به این کلمه مردد هستند؛ اکنون به کار بردن کلمهٔ «بی‌نهایت» برای کاردینال‌ها و اردینال‌های بی‌نهایت پذیرفته شده‌است. با این حال کلمهٔ ترامتناهی نیز هنوز به کار برده می‌شود.(سایت ویکی پدیا)

[9] سؤال یکی از دوستان حاضر در جلسه درس

[10] در این زمینه به مقاله گردآوری «کاربرد مفاهیم ریاضی در تبیین مفاهیم الهیاتی(۱): عدد پی» و صفحه عدد پی در سایت فدکیه مراجعه فرمایید.

[11]جلسه یازدهم فقه هوش مصنوعی

[12] در کتاب تاریخ ریاضیات در مورد اعداد ترانسفینی اینچنین می‌خوانیم:

نظريه رياضی جديد مجموعه ها يکی از مهم‌ترين ابداعات ذهن بشری است. به دليل قاطعيت آن معمول برخی از ايده هايی که در آن يافت می‌شود و به دليل برخی روش‌های ممتاز اثبات ناشی از آن نظريه مجموعه ها جذابيت وصف ناپذيری يافته است ولی بالاتر از همه اين نظريه اهميت بسيار زيادی تقريباً در تمام رياضيات دارد. اين نظريه درغنا، وضوح، توسيع و تعميم بسياری از زمينه های رياضيات بی اندازه مؤثر بوده است و نقش آن در مطالعه مبانی رياضيات کاملا اساسی است. نظريه مجموعه ها همچنين حلقه های ارتباط بين رياضيات از يک سو و فلسفه و منطق از سوی ديگر را تشکيل می دهد. دو مجموعه را هم ارز گويند اگر و فقط اگر بتوان آن‌ها را در تناظر يک به يک قرار داد.

وقتی دو مجموعه هم ارز باشند می گويند دارای يک عدد اصلی هستند. اعداد اصلی مجموعه های متناهی را می‌توان با اعداد طبيعی مشخص کرد. اعداد اصلی مجموعه های نامتناهی به اعداد ترانسفينی معروف اند و نظريه اين اعداد اولين بار توسط گئورگ کانتور در يک سری مقاله قابل توجه که از سال ۱۸۷۴ آغاز شد بسط يافت. اغلب اين مقالات در مجله های آلمانی ماتماتيشه آنالن و مجله رياضيات به چاپ رسيدند. قبل از مطالعه کانتور، رياضيدانان فقط يک بی‌نهايت را پذيرفته بودند که با علامتی شبيه به ∞ نشان داده می شد و اين علامت بدون تمايز برای نشان دادن عدد اعضا در مجموعه هايی نظير مجموعه کليه اعداد طبيعی ومجموعه کليهٔ اعداد حقيقی به کار گرفته می‌شد با کار کانتور ديدگاه کاملا جديدی مطرح گرديد و مقياس و حسابی برای بی‌نهايتها به

دست آمد.

این اصل اساسی که مجموعه های هم ارز عدد اصلی واحدی دارند، در موردی که مجموعه های تحت بررسی مجموعه های نامتناهی باشند وضعیتهای جالب و شگفت آوریپیش می آورد. گالیله پیشتر در نیمه دوم قرن شانزدهم متوجه شده بود که ، به كمك تناظر n ، مجموعه كليه اعداد صحيح مثبت را می توان در يك تناظر يك به يك با مجموعه کلیه اعداد صحیح مثبت و زوج قرار داد از اینرو باید به هر یک از این دو مجموعه عدد اصلی واحدی اختصاص داد و ، از این نقطه نظر باید گفت که تعداد اعداد صحیح مثبت برابر تعداد اعداد صحیح مثبت زوج است بی درنگ می توان مشاهده کرد که اصل موضوع اقلیدسی مبنی بر اینکه کل بزرگتر از جزء است در موقعی که اعداد اصلی مجموعه های نامتناهی مورد بحث اند نمی تواند جایز باشد. در واقع در کیندر حدود ۱۸۸۸، يك مجموعه نامتناهی را مجموعه ای تعریف کرد که با یک زیر مجموعه حقیقی خودش هم ارز باشد.

ما عدد اصلی مجموعه کلیه اعداد طبیعی را با d نشان خواهیم داد،(كانتور این عدد اصلی را با حرف عبری الف با اندیس صفر یعنی نشان داد. پ) و هر مجموعه ای با این عدد اصلی را **شمارا** خواهیم نامید نتیجه می شود که مجموعه ای مانند که شمارا است اگر و فقط اگر اعضای آن را بتوان به صورت دنباله بی پایان (s?, s? , s? , ...) نوشت. چون به آسانی می توان نشان داد که هر مجموعه نامتناهی زیر مجموعه شمارایی دارد، نتیجه می شود که d «کوچکترین» عدد ترانسفینی است. کانتور در یکی از اولین مقاله های خود درباره نظریه مجموعه ها ، شمارا بودن دو مجموعه مهم را که در نگاه اول به زحمت واجد این خاصیت به نظر می رسند، اثبات کرد.

اولین مجموعه ، مجموعه اعداد گویا است. این مجموعه خاصیت مهم **چگال** بودن را دارد. منظور این است که بین هر دو عدد گویای متمایز عدد گویای دیگری -در حقیقت بینهایت عدد گویای دیگر - وجود دارد.

مثلاً بین ۰ و ۱ اعداد گویای

1/2 .2/3 .3/4 .4/5 .5/6 .....n/(n+1)

قرار دارند، بین ۰ و ۱ اعداد گویای

1/3.2/5.3/7.4/9.5/11....n/(2n+1)

قرار دارند ....

به موجب این خاصیت ممکن است این تصور به وجود آید که عدد تر انسفینی مجموعه اعداد گویا بزرگتر ازd است.(عدد اصلی مجموعه ای مانند A را بزرگتر از عدد اصلی مجموعه ای مانند B گویند اگر و فقط اگر B باياك زير مجموعه حقيقی A هم ارز باشد ، ولی A با هیچ زیر مجموعه حقیقی B هم ارز نباشد. پ) کانتور نشان داد که چنین نیست و برعکس،مجموعۀ اعداد گویا شمارا است اثبات آن جالب و به صورت زیر است:

قضیه ۱: مجموعه اعداد گویا شمارااست.

...

دومین مجموعه ای که توسط کانتور مطالعه شد ، مجموعه اعدادی است که ظاهراً بسیار وسیعتر از مجموعه اعداد گویاست...

قضیه ۲ مجموعه كليه اعداد جبری شمارا است.

با توجه به دو قضیه قبل این امکان باقی می‌ماند که همه مجموعه های نامتناهی شما را هستند. خلاف آن توسط کانتور با برهان اعجاب آوری در قضیه مهم زیر نشان داده شد.

قضیه ۳ مجموعه کلیه اعداد حقیقی در بازه 0<x<1نامشماراست.

اثبات به برهان خلف است و روش نامعمولی موسوم به فرایند قطری کردن کانتور را مورد استفاده قرار می دهد. در این صورت فرض می‌کنیم که مجموعه شمار است. با این فرض می‌توان اعداد مجموعه را در دنباله ای مانند $\{p_1,p_2,p_3,...\}$ فهرست کرد. هر يك از این اعداد را می‌توان به طور منحصر بفردی به صورت يك كسر اعشاری نامختوم نوشت ؛ در این رابطه یادآوری این مطلب مفید است که هر عدد گویا را می‌توان به صورت «اعشاری مکرر نوشت؛ مثال عددی مانند 0.3 را می توان به صورت 0.299999... نوشت. در این صورت می‌توانیم دنباله را با آرایه زیر نمایش دهیم:

$_1=0.a_{11}\ a_{12}\ a_{13}...$
$_2=0.a_{21}\ a_{22}\ a_{23}...$
$_3=0.a_{31}\ a_{32}\ a_{33}...$
که در آن $a_{i\ j}$ به معرف یکی از ارقام ۱۰، ۲، ۳، ۴، ۵ ، ۶، ۷، ۸، ۹ است . حال علیرغم دقتی که در فهرست کردن کلیه اعداد بین ۰ و ۱ به کار رفته است عددی وجود دارد که نمی توانستهٔ در فهرست وارد شود چنین عددی$0.b_1\ b_2\ b_{3...}$ است که در آن، مثلا$b_k = 7$ در صورتی که $a_{kk}\ 7$ و $b_k=3$ اگر $a_{kk}\ 7$ به ازای هر $k=...n...3,2,1$.

این عدد آشکارا بین ۰ و ۱ قرار دارد و باید با هر يك از اعداد p متفاوت باشد، زیرا با P_1حداقل در رقم اعشاری اول تفاوت دارد، با P_2 حداقل در رقم اعشاری دوم تفاوت دارد، با P_3حداقل در رقم اعشاری سوم تفاوت دارد، و الی آخر. بدین ترتیب فرض آغازین که همه اعداد حقیقی بین ۰ و ۱ را می‌توان در دنباله ای فهرست کرد ، قابل قبول نیست، ولذا این مجموعه باید نامشمار باشد.

کانتور قضیه مهم زیر را از قضایای ۲ و ۳ نتیجه گرفت:

قضیه ۴ اعداد متعالی موجودند.

چون بنا بر قضیه ۳ مجموعه اعداد حقیقی بین ۱و۰ نامشماراست، به آسانی می توان نشان داد که مجموعه اعداد مختلط نیز نامشماراست. اما بنا بر قضیه ۲ مجموعه اعداد جبری شمار است. نتیجه می‌شود که باید اعداد مختلط که جبری نیستند وجود داشته باشند و قضیه ثابت می شود. برهان فوق برای قضیه ۴ برای همه ریاضیدانان قابل قبول نیست. قابل قبول بودن یا غیر قابل قبول بودن این برهان مربوط به تصور ما از چگونگی وجود ریاضی است و ریاضیدانانی وجود دارند که به زعم آنها وجود ریاضی فقط موقعی ثابت می‌شود که یکی از چیزهایی که وجودشان مورد بحث است عملا ساخته و نشان داده شود. ولی برهان بالا وجود اعداد متعالی را با ایجاد نمونه مشخصی از چنین اعداد ثابت نمی کند. در ریاضیات برهانهای وجودی از این نوع غیر ساختنی فراوان اند که در آنها وجود، فرضاً تنها با نشان دادن اینکه فرض عدم وجود منجر به تناقض می‌شود، ثابت می‌گردد . مثلا بسیاری از براهین قضیه اساسی جبر بر چنین اساسی فرمولبندی شده اند. به دلیل ناخشنودی برخی ریاضیدانان از برهانهای وجودی غیر ساختنی، تلاش زیادی صرف جانشینی کردن این برهانها با برهانهایی شده است که عملاً یکی از چیزهای مورد بحث را می دهند.

اثبات وجود اعداد متعالی و این اثبات که عدد خاصی متعالی است دو مطلب کاملا متفاوت اند. دو می اغلب مسئله بسیار دشواری است. ارمیت در سال ۱۸۷۳، ثابت کرد که عدد e، پایه لگاریتم طبیعی متعالی است. لیندمان ، در سال ۱۸۸۲، برای اولین بار متعالی بودن را ثابت کرد. متأسفانه برای اثبات این حقایق جالب در این کتاب محدوداتی وجود دارد. دشواری مشخص کردن جبری بودن یا متعالی بودن عدد مفروض خاصی را می توان با این حقیقت روشن کرد که هنوز معلوم

نیست که جبری ای متعالی است . دستاورد جدیدی در این زمینه اثبات ماهیت متعالی بودن اعدادی به شکل است که در آن a عددی جبری جز ۰ و ۱ است و b يك عددان گوياى جبرى مىباشد اين نتيجه كه در سال ۱۹۳۴ توسط الکساندر او سیپوویچ گلفوند (متولد۱۹۰۶) به دست آمده و امروزه قضیه گلفوند نامیده می شود حاصل کوشش تقریباً ۳۰ ساله ای برای اثبات متعالی بودن به اصطلاح عدد هیلبرت ، 2 بوده است.

چون مجموعه همه اعداد حقیقی در بازه **0<x<1** نامشمار است، عدد تر انسفینی این مجموعه بزرگتر از d است. ما آن را با c نشان میدهیم و آن را **عدد اصلی متصله** اطلاق می کنیم. عقیده کلی بر این است که c عدد ترانسفینی بعد از d است، یعنی اینکه هیچ مجموعه ای نیست که دارای عدد اصلی بزرگتر از d و کوچکتر از c باشد. این اعتقاد به فرض متصله موسوم است ولی علی رغم کوششهای شدید هنوز برهانی برای آن پیدا نشده است. نتایج زیادی از این فرض استنتاج شده اند و به حدود سال ۱۹۴۰، منطقی اطریشی کورت گودل (۱۹۰۶) - (۱۹۷۸) به اثبات این نکته موفق شد که فرض متصله با مجموعۀ اصول موضوعه مشهوری مربوط به نظریه مجموعه ها سازگار است به شرطی که خود این اصول موضوعه سازگار باشند. گودل حدس زد که انکار فرض متصله نیز با اصول موضوعه نظریه مجموعه ها سازگار است. این حدس را در سال ۱۹۶۳ دکتر پ. ج. کوهن از دانشگاه استانفورد ثابت کرد و بدین ترتیب نشان داد که فرض متصله از اصول موضوعه نظریه مجموعه ها مستقل است و بنا بر این قابل استنتاج از این اصول موضوعه نیست. این وضعیت شبیه به وضعیت اصل توازی در هندسه اقلیدسی است.

نشان داده شده است که مجموعه کلیه توابع تك مقداری مانند $f_1(x)$ که بر بازه **0<x<1** تعریف شده اند، دارای عدد اصلی بزرگتر از c هستند ولی اینکه آیا عدد اصلی مزبور عدد بعد از c هست یا نیست معلوم نشده است. نظریه کانتور دنباله نامتناهیی از اعداد ترانسفینی را پیش بینی میکند و براهینی وجود دارند که مقصودشان نشان دادن آن است که تعداد نامحدودی از اعداد اصلی بزرگتر از متصله عملاً موجودند. (تاریخ ریاضیات، ج ۲، ص ۳۰۲-۳۰۷)

ب) کانتور؛ نظریّات و بازتاب آن

«بین ریاضی دان های قرن بیستم بحثی پیش آمده بود در قرن بیستم که به بهشت کانتور معروف شد. کانتور[1] یک ریاضی دان بود؛ نظریه مجموعه ها را آورد، بعد هم اعداد ترانسفینی و اعداد بینهایت. در قرن بیستم ریاضیات، برای بینهایتها دستگاهی به پا کرد.

سخن هیلبرت: «بهشت کانتور»

یکی دیگر از ریاضیدانهای مهم قرن بیستم هیلبرت بود. ایشان یک جمله‌ای گفت که جمله او بین محافل علمی معروف شد. چون عده‌ای بعد از کانتور بودند تا تلاش کنند این حرفهای او را ذوب کنند و حذف کنند؛ ضعیفش کنند و از بین ببرند[3]. او که خودش ریاضی دان بزرگی بود این جمله را گفت: احدی را یارای این نیست که ما را از بهشتی که کانتور برای ما آورد بیرون کند[4]. این جمله معروف شد. یعنی تلاشهای کسانی که میخواهند اینها را تعطیل کنند، تلاش بی خودی است. بهشت کانتور در قرن بیستم معروف شد.

امکان ارائه «بهشت کانتور» با شواهد

به گمان من طلبه، برای ما امکاناتی فراهم است تا این بهشت را نشان بدهیم؛ نه اینکه یک چیزی همینطور بگوییم. باید نشان داده شود. یکی از شئون مهم این باور کانتور را پارسال در عدد پی نشان دادم[5]. عرض کردم نقطه عدد پی روی محور، بین سه و چهارده تا سه و پانزده صدم قرار میگیرد، بین اینها بینهایت نقاط ممتاز متعین داریم. متعین ثابتی که هر چه پیشرفت کنیم آنها را به دست میآوریم. نه همینطور لایقفی[6]! نه، اعداد ممتاز.

بینهایت بالفعل؛ بینهایت لا یقفی

[از زمان ارسطو، تمام بی نهایت ها، چه بی نهایت بزرگ و چه بی نهایت کوچک را با بی نهایت بالقوّه حل می کردند.بی نهایت بزرگ را می گفتند: لایقف . بی نهایت کوچک را می گفتند: بالقوّه . ما هم با این دوتا خیلی مانوس هستیم چون مبنای کتابهای ما هم معمولاً ارسطویی است. انسان خودش را قانع میکند به بی نهایت لا یقفی و کار تمام میشود[7]]

در این فاصله کوتاه، شما می‌توانید یک مفهوم افلاطونی را نشان بدهید. این، یکی از شعب آن بهشت است؛ کسی که دنبال این‌ها است وقتی احساس کرد دیگر فاصله نمی‌گیری و دیگر به دیگری نگاه نمی‌کند. این خیلی مهم است؛ شما فقط این قدرت را داشته باشید که نشان بدهید. الآن گنگ بودن عدد پی در زمان ما صاف صاف است. فقط از لوازمش استفاده‌ای که باید بکنیم، نمی‌کنیم[8].

سخن ویتگنشتاین

یک جا دیدم؛ بعد از این‌که هیلبرت این حرف را زد، ویگنشتاین گفته بود: من که هرگز زحمت نمی کشم تا شما را از این بهشت بیرون کنم؛ من فقط یک کار می‌کنم؛ من توصیف می‌کنم و می‌گویم این بهشت نیست، وقتی خودتان دیدید که بهشت نیست، خب از آن بیرون می‌آیید[9]! چرا شما را از بهشت بیرون کنم؟! من توضیح می‌دهم که این بهشت نیست، لذا خودتان بیرون می‌آیید. چون شما به خیال بهشت آن جا مانده‌اید، وقتی من توضیح دادم که بهشت نیست، خودتان بیرون می‌آیید. این جمله‌ای بود که او گفته بود. ویگنشتاین این را در جواب هیلبرت گفته بود. او گفته احدی را یارا نیست، او گفته بود من این جور توصیف می‌کنم.

پاسخی به ویتگنشتاین

به ذهن طلبگی من آمد که به این صورت جوابش را بدهیم؛ بگوییم ما که حاضر هستیم شما توصیف کنید اینجا بهشت نیست تا بیرون بیایید. اما چرا بیرون تشریف دارید و توصیف می‌کنید؟! بیایید داخل بنشینید و تعریف کنید. از اینجا تعریف کنید که بهشت نیست. می‌دانید تفاوت در چیست؟ ویگنشتاین، فیلسوف تحلیلی است و شروع فلسفه تحلیلی بسیار مدیون او است. ظاهراً از استادش راسل اینطور نقل کرده‌اند: گفت زدم من آمد و گفت تشخیص شما چیست، استاد؟! اگر من فیلسوف می‌شوم بمانم، اما اگر نمی‌شوم یک شغلی را انتخاب کنم. خودش اینطور می‌گوید: اگر من را یک احمق می‌بینی خب فلسفه خواندن را رها کنم و مهندس بشوم. اگر من را احمق نمی‌بینی خب فلسفه را ادامه می‌دهم. استاد گفته بود، صبر کن تعطیلی ها پیش بیاید، من یک مقاله می‌دهم برو بنویس تا ببینم احمق هستی تا فلسفه را رها کنی یا نه؟! خب اینها شروع این فلسفه تحلیلی برای او بود[10][11].»

---

[1] گئورگ فردیناند لودویگ فیلیپ کانتور (۳ مارس ۱۸۴۵؛ [در برخی منابع ۱۹ فوریه نیز گزارش شده] – ۶ ژانویه ۱۹۱۸) ریاضیدانی آلمانی بود. آوازهٔ کانتور بیشتر به‌خاطر ابداع نظریه مجموعه‌ها می‌باشد چرا که امروزه به نظریه‌های بنیادین در ریاضیات تبدیل شده‌است. کانتور ایدهٔ تناظر یک به یک میان اعضای دو مجموعه را مطرح کرد، مفهوم بینهایت و مجموعه‌های خوشترتیب را تعریف نمود، و همچنین ثابت کرد که مجموعه اعداد حقیقی «بزرگتر» از مجموعه اعداد طبیعی است. در حقیقت، روش کانتور در اثبات این قضیه نشان می‌داد که مجموعه‌های نامتناهی از بینهایت‌ها وجود دارد. او اعداد اصلی و ترتیبی و حساب آن‌ها را تعریف کرد. **دستاورد کانتور از لحاظ فلسفی نیز جایگاه ویژه‌ای دارد و وی نیز به‌نیکی از این حقیقت آگاه بود**. در ابتدا تصور می‌شد که نظریه کانتور دربارهٔ اعداد ترامتناهی (ترانسفینی) تا حدود زیادی خلاف شهود—یا حتی تکاندهنده—است، تا آن‌جا که با مقاومت شدید همعصران او همچون لئوپولد کرونکر و آنری پوانکاره، و بعدها هرمان ویل و لوئیتزن اخبرتوس یان برووار قرار گرفت، و لودویگ ویتگنشتاین نیز در مورد نظریهٔ او ایرادهای فلسفی بیان نمود. برخی از علمای مسیحی (به‌ویژه

پیروان جدی فلسفه مدرسی) نمی‌پنداشتند که دستورد کانتور چالشی است بر یکتایی بی‌نهایت مطلق در طبیعت خدا؛ یعنی برابر دانستن نظریه اعداد ترامتناهی با همه‌خدایی، در حالی‌که **کانتور چنین مدعایی را به‌شدت در می‌کرد**. این اتفاقها در برخی موارد حتی شدت بیشتری می‌یافتند: **پوانکاره از ایده‌های کانتور به‌عنوان بیماری گریزی یاد می‌کرد و می‌گفت که این بیماری نظام ریاضیات را عفونی می‌کند**. کرونکر نیز در نزد عموم به‌مخالفت صریح با کانتور برمی‌خاست و به‌وی حملات شخصی می‌کرد؛ از جمله اینکه از او به‌عنوان یک "شارلاتان علمی،" یک "ازدین‌برگشته" و یک "فاسدکننده ٔجوانان" یاد می‌کرد. کرونکر حتی از اثبات کانتور مبنی بر شمارا بودن اعداد جبری و ناشمارا بودن اعداد متعالی ایراد می‌گرفت، در حالی‌که امروزه این نتایج بخشی از برنامه استاندارد درس ریاضی هستند. حتی دهها پس از مرگ کانتور، ویتگنشتاین با درغ نوشت که ریاضیات "مورد تاخوتاز اصطلاحات آسیب‌رسان نظریه مجموعه‌ها قرار گرفته‌است." وی چنین اصطلاحاتی را "مزخرف مطلق،" "خنده‌آور،" و "نادرست" تلقی می‌کرد. گفته می‌شود که علت مجموعه افسردگی‌های کانتور از ۱۸۸۴ تا پایان زندگی او، دشمنی بسیاری از معاصرانش با وی بوده‌است، اگرچه برخی نیز از این افسردگی‌ها به‌عنوان ظهور اختلال دوقطبی در وی یاد می‌کنند. این اتفاقهای شدید، بعدها به تحسین و تمجید تبدیل شدند. در سال ۱۹۰۴، انجمن سلطنتی جایزه ٔمدال سیلوستر را به‌وی داد که به‌عنوان بزرگترین جایزه و افتخاری تلقی می‌شود که برای دستورد ریاضی به شخصی اهدا می‌گردد. گفته می‌شود **کانتور بر این باور بوده که نظریه اعداد ترامتناهی از سوی خدا به‌وی الهام شده بوده‌است**. مشهور است که داوید هیلبرت از دستورد کانتور در برابر منتقدان، اینچنین دفاع می‌کرد: "هیچ‌کس نمی‌تواند ما را از بهشتی که کانتور آفریده، بیرون کند."(سایت ویکی پدیا)

[2] داوید هیلبرت (آلمانی: David Hilbert، ۲۳ ژانویه ۱۸۶۲ – ۱۴ فوریه ۱۹۴۳) ریاضیدان آلمانی و از مشهورترین ریاضیدانان قرن نوزدهم و آغاز قرن بیستم میلادی بود. او از اثرگذارترین ریاضیدانان در پیدایش و گسترش مکانیک کوانتومی و نظریه نسبیت است. هیلبرت طیف وسیعی از ایده‌های اساسی را در بسیاری از زمینه‌ها شامل نظریه ناوردا، حساب تغییرات، جبر جابجایی، نظریه جبری اعداد، بنیان‌های هندسه، نظریه طیفی عملگرها و کاربردهای آن در معادله انتگرالی، ریاضی فیزیک و نظریه برهان، کشف و توسعه داد.

او در کونیگسبرگ زاده شد و ۱۸۸۴ از دانشگاه این شهر دکترا گرفت و نزدیک ده سال را به تدریس در آن دانشگاه گذراند. سپس در ۱۸۹۵ به استادی دانشگاه گوتینگن رسید و تا پایان عمر در این شهر زیست.(سایت ویکی پدیا)

[3] در این زمینه به مقاله «GEORG CANTOR AND THE BATTLE FOR TRANSFINITE SET THEORY» (گئورگ کانتور و نبرد برای نظریه مجموعه های فرامتناهی) مراجعه فرمایید.

4] "No one shall drive us from the paradise which Cantor has created for us."(A glimpse of antor's paradise)

در این زمینه همچنین به صفحه«بهشت کانتور» در سایت فدکیه مراجعه فرمایید.

[5] جلسه ۸ فقه هوش مصنوعی

[6] ملاصدرا در بیان اقسام بی نهایت و تفکیک بین بی نهایت بالقوه و بی نهایت بالفعل می فرماید:

و منها أن غير المتناهي على معنيين: أحدهما بالقوة و هو غير المتناهي اللايقفي

و ثانيهما بالفعل و هو غير المتناهي العددي، و مقدورات الله تعالى عند المتكلمين غير متناهية بالمعنى الأول لا بالمعنى الثاني لأنهم منكرون لوجود الغير المتناهي بالفعل مرتبا كان أو غير مرتب متعاقبا كان أو مجتمعا و التفاوت إنما يجوز في غير المتناهي بالمعنى الأول كقبول الجسم عند الحكماء للأنصاف المتداخلة غير المتناهية و الأرباع المتداخلة غير المتناهية و الثانية نصف الأولى.(الحكمة المتعالية، ج ۷، ص ۳۱۸)

شهيد مطهري بي نهايت بالقوة را اين گونه تبيين مي كند:

اعداد متناهي نيستند؛ يعني اگر اعداد را بياني كرده و بالا برويم و بگوييم ۱، ۲، ۳،...، ۱۰۰۰،...، ۱۰۰۰۰۰،... هر چه بالا برويم به عددي كه ما فوق آن نتواني عددي را فرض كرد نمي‌رسيم. هر عددي را كه ما فرض كنيم باز هم ما فوق آن عددي فرض مي‌شود، بلكه براي آن دو برابر هم فرض مي‌شود، بلكه خودش ضرب در خودش هم فرض مي‌شود، خود آن به توان ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و... هم فرض مي‌شود. هر عددي را كه ما اعتبار كنيد و بگوييد اين آخرين عدد است باز هم بالاتر از آن عدد است. اين است كه مي‌گويند اعداد غير متناهي است.

اما **اينكه مي‌گويند اعداد غير متناهي است، منظور غير متناهي بالفعل نيست، بلكه منظور «غير متناهي لا يقفى» است**. لايتناهي بالفعل يعني اينكه ما يك موجود بالفعل غير متناهي داشته باشيم، مثل اينكه كسي بگويد ستاره‌هاي عالم بالفعل غير متناهي‌اند، ذرّات عالم بالفعل غير متناهي‌اند؛ كه اگر كسي گفت ستاره‌ها بالفعل غير متناهي است، بايد بگوييم ما الآن غير متناهي عدد ستاره در خارج داريم. اين يك مسأله است. اما آنكه مي‌گويد عدد غير متناهي است، به اين معنا نمي‌گويد. منظور غير متناهي لا يقفى است. غير متناهي لا يقفى به ذهن ما برمي‌گردد، به خارج مربوط نيست؛ يعني ذهن ما هر عددي را كه اعتبار كند عدد در آنجا متوقف نمي‌گردد؛ امكان اعتبار عددي ديگر كه يكي بيشتر اي دوتا بيشتر اي دو برابر آن اي هزار برابر آن باشد هست. اين را مي‌گويند «لا يتناهي لا يقفى». شيخ همين جا اشكال خود را وارد مي‌كند.(مجموعه آثار شهيد مطهري، ج ۷، ص ۵۶۷-۵۶۸)

تناهي به دو معناست: يكي تناهي عددي، و ديگر تناهي لا يقفى.

نامتناهي عددي آن است كه شيء بالفعل موجود و نامتناهي باشد، مثل خط و سطح و جسم بالفعل موجود باشد و نهايت نداشته باشد. و نامتناهي لا يقفى آن است كه بالفعل موجود نباشد، بلكه به هر مرتبه كه رسد باز در آن چيزي بتواند فرض نمود.چنانچه حكما گويند كه جسم قابل قسمت است الى غير النهاية، كه هر اندازه جسم را تقسيم كنيم باز هم قابل قسمت است و به انتهاء نمي‌رسد. و اينكه حكما گويند نامتناهي وجود ندارد مقصود نامتناهي عددي است، ولي نامتناهي لايقفى جائز و واقع است، مثل اينكه جسم به نامتناهي تقسيم مي‌شود و اين قسمتها به جايي نمي‌رسند كه ديگر تقسيم نشوند. حكماي قديم يونان مي‌گفتند ابعاد نامتناهي است.(مجموعه رسائل عرفاني و فلسفي،ص ۲۶۹)

اين اصطلاح اولين بار در كلام ارسطو به كار رفته است. او در اين باره مي گويد:

قال الإسكندر: هل المتحرك على عظم ما يتحرك في أول حركته على أول جزء منه، أم لا؟ و ذلك أن كل حركة إنما صارت في زمان لأنه ليس يمكن أن يتحرك المتحرك على الشيء الموضوع ليتحرك عليه دفعة، لكنه يقطع منه شيئا بعد شيء؛ فإذا هذا هكذا، فالمتحرك يتحرك أولا على أول جزء من أجزاء العظم الذي يتحرك عليه. فإن كان الأول في العظم يمر بلا نهاية، فكل محرك يصير متحركا على أشياء بلا نهاية؛ و كل متحرك يتحرك بعد ما، فإنه يكون متحركا آخر بلا نهاية أولية. و الأشياء التي بلا نهاية لا تقطع مسافتها، فنقول: إنه لا بد - إذ كانت قسمة الأشياء المتصلة بلا

نهايه - من أحد أمرين: إما أن تكون الحركة ال تجوز أو الوعلى الجزء الأول، وأ تكون قد تجوز على الجزء الأول من العظم إنما وه من قبل أن في العظم المتصل جزء يتقدم و جزء يتأخر. و ذلك أنه ليس الأجزاء في المتصل بحال غير الحال التي نقول بها إن المتحرك نفسه يقطعها؛ فكيف إذا يوجد بعض الأجزاء متقدما و بعضها متأخرا في المتصل، إما بالفعل أم بغير الفعل؟ فنقول: إنه ليس شيء من الأعظام المتصلة أجزاؤه منفصلة، و ال هي في الكل بالفعل، لأن العظم إنما وه غير منقسم بالفعل؛ و ول كان منقسما بالفعل، لما كان عظما واحدا، و ال كانت الحركة واحدة. فإذ كانت الأجزاء التي في الكل ليست بالفعل فيه **فقد بقي أن يكون في الكل الذي وه متصل بالقوة، و يكون المتقدم و المتأخر المتصل إنما وه بالقوة ال بالفعل، و يكون المتحرك عليه إنما يتحرك على الجزء الأول أو ال على الحال التي يوجد بها الجزء في العظم، و وجوده فيه بالقوة.** فعلى هذه الجهة إذا يتحرك عليه. و إنما يفعل هذا من قبل أنه يتحرك عليه من غير أن يقسمه و من غير أن يجعل جزء منه أو ال و جزء ثانيا بالفعل. و المتحرك إذا تحرك على هذه الجهة على العظم فإنما يكون متحركا في الأجزاء الأوائل على حسب ما هي في العظم و نهايه، و **وجودها في العظم بال نهايه إنما وه بالقوة.** و معنى قولنا: إنه غير متناهيه القوة، ال تقطع مسافتها؛ بل إنما وضعنا ذلك فيما كان بالفعل.(أرسطو عند العرب، صفحه: ٢٧٨)

وا رد جای دیگر رد مورد بی نهایت های بزرگ(رد ابعاد) و کوچک(رد مقادیر) چنین می نویسد:

و بالواجب أيضا لزم أن يكون غير المتناهي أمّا بالزياده فقد يظن أنه ال يمكن أن يتجاوز كل مقدار، و أما بالقسمه فقد يمكن؛ و ذلك أن <غير المتناهي و> الهيولى محاط بهما دخال، و هي الشيء غير المتناهي و المحيط وه الصوره. و بالواجب أيضا صار في **العدد** في الذهاب إلى القله نهايه، و **في الذهاب إلى الكثره يزيد أبدا على كل عدد**. و صار **في المقدار** الأمر بالضد: أما إ**لى الصغر فقد يتجاوز كل مقدار**، و أما إلى الكبر فال يمكن أن يوجد مقدار غير متناه. و السبب **العدد إنما وه** في ذلك أن الواحد غير منقسم - أيّ واحد كان - مثل الإنسان إنه إنسان واحد ال كثير، و **آحاد كثيره و كميه ما. فقد يجب أن نقف عند ما ال ينقسم**، فإن الاثنين و الثلاثه إنما هي أسماء، و كذلك واحد من سائر الأعداد. **فإن أما ذهابه إلى الكثره فقد يمكن توهمه دائما. و قسمه المقدار بنصفين، و نصفه بنصفين يمر بال نهايه، فيكون <العدد غير متناه> بالقوة ؛ فأما بالفعل - فال**. غير أنه قد يوجد منه ما يزيد دائما على كل عدة محدده، لكن هذا العدد ليس بمفارق لهذه القسمه، و ال بال نهايه أمر باق، لكنه أمر يتكون دائما، و كذلك الزمان و عدد الزمان.

فأما المقادير فإن الأمر فيها بالضد، و ذلك أن المتصل قد ينقسم بال نهايه؛ غير أنه في العظم ليس يكون غير متناه. لأنه بأيّ مقدار كان يمكن أن يكون بالقوة، فإنه بذلك المقدار يمكن أن يكون بالفعل. فإذ ليس يوجد أصلا مقدار محسوس غير متناه، فليس يمكن أن يكون يفضل على كل مقدار محدود، لأن ذلك لو جاز لقد كان سيكون ما وه أعظم من السماء.(الطبيعة (أرسطو)، جلد: ١، صفحه: ٢٦٣)

در کلمات سایرین:

و الجواب: أنّ النهايه إمكان القسمه خاصّة للأجسام كلّها. و كما ال يلزم من اشتراك الكلّ و الجزء في الجسميّة اشتراكهما في خواصّ المقدار، كذلك ال يلزم من اشتراكهما في خاصّة الجسم، و هي النهايه إمكان القسمه، اشتراكهما في خواصّ المقدار. سلّمنا أنّ الشيئين إذا اشتركا في عدم التناهي اشتركا في عدم التواطؤ، و لكن ال مطلقا، بل **فيما يكون أعدادهما الغير المتناهيه حاصله بالفعل. أمّا إذا كانت بالقوّة فال**، كيف و الوجود يكذّبه.

أال ترى أنّ الأول المتضاعفة إلى غير النهايه بالقوّة و الإمكان فيها من المئات الغير المتناهيه بالقوّة عشرة أمثالها، و من العشرات مائة أمثالها، مع أنّ عدد كلّ قطعة من الثلاثة غير متناه بالقوّة؛ بمعنى أنّا إلى أيّ حدّ أنتهينا في العدد أمكن الزيادة عليه؛ لكن لمّا

لم تكن هذه الألوف الغير المتناهية حاصلة بالفعل، لم يلزم من الاشتراك في اللاّنهاية التساوي في الأعداد(حکمة الإشراق (تعلیقه م الا صدرا)، جلد: ۱، صفحه: ۳۲۲)

السادس أن العدد ليس بمتناه و معناه أنه ال توجد مرتبة من العدد إلا و يمكن فرض ما يزيد عليها و كذا فرض ما يزد على الزائد و ال تقف السلسلة حتى تنقطع بانقطاع الاعتبار و يسمى غير المتناهي اللايقفي و ال يوجد من السلسلة دائما بالفعل إلا مقدار متناه و ما يزيد عليه فهو في القوة و أما ذهاب السلسلة بالفعل إلى غير النهاية على نحو العدول دون السلب التحصيلي فغير معقول فال كل و ال مجموع لغير المتناهي بهذا المعنى و ال تحقق فيه لشيء من النسب الكسرية كالنصف و الثلث و الربع و إلا عاد متناهيا. (نهایة الحکمة، ص ۱۱۲-۱۱۳)

[7] برشی از مقاله گردآوری «مثال دقیق، سؤال روان؛ ابزاری برای ارائه مجردات به همگان».

[8] نمونه‌ای از تلاش برای عینی سازی بهشت کانتور را در مقاله گردآوری «مثال دقیق، سؤال روان؛ ابزاری برای ارائه مجردات به همگان» ملاحظه می‌کنید.

[9] I would say, `I wouldn't dream of trying to drive anyone from this paradise.' I would do something quite different: I would try to show you that it is not a paradise — so that you'll leave of your own accord. I would say, `You're welcome to this; just look about you.' . . .
For if one person can see it as a paradise . . ., why should not another see it as a joke?) (Ludwig Wittgenstein)(The Infinite)

[10] راسل می‌گوید که در اواخر نخستین نیمسال تحصیلی، وی‌تگنشتاین در ۱۹۱۲ او پرسید: من یک احمق تمام عیارم یا نه؟ اگر بلی هواندور خواهم شد و اگر نه فیلسوف. راسل در پاسخ پیشنهاد کرد که او در طی تعطیلات مقاله‌ای در باب یک موضوع فلسفی بنویسد. وقتی او در آغاز نیمسال جدید مقاله را به راسل نشان داد، او یک جمله از آن را خواند و گفت: نه تو نباید هواندور شوی!(لودویگ وی‌تگنشتاین، ص ۱۲)

[11] جلسه سی و دوم فقه هوش مصنوعی

ج) تبیین نظریه کانتور

دسته بندی کانتور

«بهشت کانتور، بحث راجع به مجموعه های بی نهایت ها و دسته بندی مراتبشان و اعداد ترانسفینی است.

۱. «الف صفر»: مجموعه اعداد طبیعی و...

 ایشان مجموعه ها و بی نهایت بودنشان را رده بندی کرده است به همان حرف الفبای عبری[1]، اولین قوه بی نهایت را که اعداد طبیعی هستند اسمش را گذاشته است: «الف صفر».

[در این کتابهای منطق ریاضی می‌گویند بی‌نهایت اُمگا[2]. اُمگا، آخرین حرف است[3]. یعنی پایین‌ترین بی‌نهایت. اولین بی‌نهایتی که از نظر قوت بی‌نهایتی از همه کمتر است، همان الف صفر است. اینها اعداد بی‌نهایت ها است. یعنی همانطوری که عدد یک و دو داریم، بی‌نهایتها هم درجه بندی دارد. پایین‌ترین بی‌نهایت، الف صفر است که همان بی‌نهایت امگا است[4].]

«الف صفر»، کاردینالش یک کاردینالی ست که اولین درجه ی بی نهایت است.الف صفر، در اعداد ترانفسینی شروع کار است بعد هم اثبات می کند که به برهان قطری کانتور[5] معروف است، برهان خیلی خوبی است.آتئیست ها هم از این برهان برای مقاصد پوچ خودشان استفاده می کنند. در مقاله باخدایی گام به گام عرض کردم. هم استدلال آن ها را آوردم و هم عرض کرده ام که ربطی به مقصود آن ها ندارد[6].

علی ای حال با برهان قطری -در همین کتاب تاریخ ریاضیات هم هست- چه چیزی را ثابت کرده است؟ یک چیز عجیب؛ می گوید:شما بین دو و سه در مجموعه اعداد طبیعی، عددی دیگر پیدا نمی کنید. بینش چیزی نیست.اما هر دو عدد گویا بینش دوباره بی نهایت عدد گویا پیدا می کنید.این چیز کمی است؟! چه قدر گسترده می شود. در عین حال همین آقای کانتور در برهان خودش اثبات کرده که تواان بی نهایتی مجموعه اعداد گویا با این فشردگی با تواان بی نهایتی مجموعه اعداد طبیعی که می شمریم برابر است. لذا می گوید هر دو شمارا هستند شمارا یعنی تناظر یک به یک دارند.تناظر یک به یک در بی نهایت ها.

۲. «الف یک»: مجموعه اعداد حقیقی

اما وقتی می رسد به مجموعه اعداد حقیقی می گوید نه دیگر.تواان بی نهایتی مجموعه اعداد حقیقی که اعداد گنگ هم در آن هست، بیش از «الف صفر» است لذا اسمش را گذاشته است: «الف یک».«الف یک» می شود مجموعه اعداد حقیقی که این همه گستردگی و این همه مباحث برایش مطرح

شده است.می گویند: مجموعه اعداد حقیقی، به اندازه کافی فشرده است؛
یعنی غیر از این که هر دو نقطه اش بینش بی نهایت نقطه و عدد هست، هیچ جای خالی هم بینش نمی تواند پیدا کند و لذا ناشمار است. کانتور برهان خلف اقامه می کند که «الف یک» مجموعه اعداد حقیقی ناشمار است. یعنی دیگر با اعداد طبیعی هم قوه نیستند. [یعنی خطی که اعداد حقیقی است، اعداد طبیعی و شمارش نمیتواند آنها را بشمارد[7]]

از همین برهان خلف کانتور، یکی مبنای فلسفه ریاضی پیدا شده است[8].

مبانی سه گانه در فلسفه ریاضیات

سه تا مبنا هست در منطق ریاضی و فلسفه ریاضی که زیاد از آن اسم می برند:

۱. صورت گرایی[9] فرمالیسم،

۲. منطق گرایی [10]Logicism،

۳. یکی هم شهودگرایی مال بروار[11].

شهودگرایی همین است. می گوید: برهان خلف کانتور را در اثبات «الف یک»، مجموعه اعداد حقیقی قبول ندارم.باید حتماً بسازیم تا اثبات کنیم. به صرف برهان خلف اثبات نمی شود.این ها هم بحث های خوبی است که در قرن بیستم انجام شده است[12].»

---

[1] الفبای عبری از ۲۲ حرف تشکیل شده‌است. صداهای زیر شیوهٔ تلفظ حروف عبری هستند

آلِف ? -- بِت ? – وِت ? -- گیمل ? – دالِت ? – هِ? – واو ? – زایین ? – خِت ? – تِت ? – یُد ? – کاف ? – خاف ? -- خافْسُفیت ? -- لامِد ? – مِم ? – مِمْسُفیت ? -- نون ? – نون سُفیت ? -- سامخ ? – عایین ? – پِ? -- فِ? -- فِسُفیت ? -- تْسادی ? – تْسادی سُفیت ? -- کُف ? – رِش ? – شین ? – سین ? -- تاو ?

2] Aleph-omega is
? = sup{ ?n | n ? ? } = sup{ ?n | n ? {0, 1, 2, ...} }
here the smallest infinite ordinal is denoted as ?. That is, the cardinal number ?? is the least pper bound of
?n | n ? {0, 1, 2, ...} }.
otably, ?? is the first uncountable cardinal number that can be demonstrated within ermelo–Fraenkel set theory not to be equal to the cardinality of the set of all real numbers 2?0: or any natural number n ? 1, we can consistently assume that 2?0 = ?n, and moreover it is

ossible to assume that 2?0 is as least as large as any cardinal number we like. The main estriction ZFC puts on the value of 2?0 is that it cannot equal certain special cardinals with ofinality ?0. An uncountably infinite cardinal ? having cofinality ?0 means that there is a countable-length) sequence ?0 ? ?1 ? ?2 ? ... of cardinals ?i < ? whose limit (i.e. its least upper ound) is ? (see Easton's theorem). As per the definition above, ?? is the limit of a countable-length equence of smaller cardinals.(Wikipedia)

?عدد ترتیبی مجموعه اعداد طبیعی N ، با رابطه کوچکتر ای مساوی معمولی، را معمولاً با حرف ویونانی اماگا ?نشان میدهند؛ یعنی:

? =ord(1,2,3,…) (آشنایی با نظریّه مجموعهها و کاربردهای آن، ص ۱۶۹)

بررسی اعداد اردینال به تعاریف مقدمات زیادینیاز دارد وما آنها را به صورت فشرده ای اینجا بیان می کنیم :

در تمام این بحث صفر را هم عضوی از اعداد طبیعی در نظر میگیریم.

مجموعه خوش ترتیب: یک مجموعه همراه با یک رابطه ترتیب را خوشترتیب گوییم هرگاه هر زیر مجموعه آن دارای عضو اقل (کوچکترین عضو) باشد. مثل مجموعه اعداد طبیعی.

دو مجموعه مرتب که تنها برچسب گذاری اعضایشان با هم تفاوت دارد را یکریخت ترتیبی (order isomorphic) گوییم، به این معنا که " عضوی از مجموعه اول از عضوی دیگردر این مجموعه کوچکتر باشد اگر وتنها اگر همتای آن عضوی از مجموعه دوم پیدا شود که از عضوی از آن مجموعه کوچکتر است" ، که به این تناظر یک به یک یکریختی ترتیبی (order isomorphism) گویند.مثلا مجموعه های خوش ترتیب {3و2و1} و{16و15و14} یکریخت ترتیبی هستند . یعنی اولین عضو در یک مجموعه برچسب 1 و در مجموعه دیگر برچسب 14 دارد وبه همین ترتیب دومین و سومین عضو .

اکنون می توان با این یکریختی رده های هم ارزی تعریف کرد.که در هر رده همه مجموعه های یکریخت ترتیبی قرار دارند.

اعداد اردینال

اولین تعریف عدد اردینال :یک عدد اردینال مجموعه خوشترتیبی است مثل a که هر عضو آن مثل x برابر با مجموعه عناصری از a باشد که از x کوچکترند.

اعداد اردینال در ریاضیات به زبانهای مختلفی تعریف شده اند،اکنون ما به بررسی مختصر ماهیت آن می پردازیم.

به زبان خیلی ساده اعداد اردینال رده های هم ارزی مجموعه های خوشترتیب را برچسب گذاری می کند.یا هر عدد اردینال یک نمایندهء از دسته هم ارزی مجموعه های خوشترتیب را مشخص می کند.

در حالت خیلی ساده مجموعه اعداد طبیعی را در نظر بگیرید ،زیر مجموعه های زیر را در نظر بگیرید

{},{0},{0,1},{0,1,2},.....

(که این زیر مجموعه اها در واقع نمایندهء مجموعه های مرتب متناهی هستند)

برای این زیر مجموعه اها دو نوع برچسب گذاری می توانیم انجام دهیم

1. برچسب كارديناليتي كه به هر مجموعه تعداد اعضا (بحث بر روي اندازه مجموعه(size)) را نسبت مي دهدمثال برچسب مجموعه {1و0} عدد 2 خواهد بود.

2. برچسب ارديناليتي كه به هر مجموعه برچسب ترتيب آن مجموعه(بحث روي موقعيت اعضا position) را مي زند ، توجه داريم كه اين مجموعه ها نمايندهٔ رده هاي ترتيبي مجموعه هاي مرتب متناهي هستند مثال مجموعه{2و1و0} نمايندهٔ همه مجموعه هاي ترتيبي 3 عضوي است.البته در حالت متناهي اين دو نوع برچسب گذاري يكسان هستند(چون هر دو مجموعه ترتيبي متناهي با تعداد اعضاي يكسان يكريخت ترتيبي هستند). اما در حالت ان متناهي كامل متفاوتند .

خب پس تا اينجا اعداد ارديناليتي متناهي به صورت زير تعريف شده اند(كه در اين حالت همان اعداد طبيعي هستند)

0,1,2,3,....

كه برچسب مجموعه هاي خوشترتيب و متناهي زير هستند:

{ } ,{0} ,{0,1} ,{0,1,2},.....

به طور مثال عدد ارديناليتي 26 يعني مجموعه خوشترتيب {25و.....و1و0}

پس باراي مجموعه هاي مرتب متناهي كه اعداد ارديناليتي (كه گاهي باراي سادگي فقط مي گويند ارديناليتي) چيز جديدي نيستند.اما در حالت انامتناهي وضع به كلي فرق ميكند به هر مجموعه انامتناهي تنها يك برچسب اندازه (كارديناليتي)دارد اما يك مجموعه خوش ترتيب انامتناهي مي تواند چند رده خوشترتيب غير يكريخت داشته باشد.

در واقع گسترش و توسيع برچسب اندازه باراي مجموعه هاي انامتناهي منجر به تعريف كارديناليتي يك مجموعه و گسترش و توسيع برچسب ترتيب مجموعه هاي انامتناهي منجر به تعريف ارديناليتي يك مجموعه مي شود.

مجموعه همه اعدادطبيعي {...و4و3و2و1و0} كه يك مجموعه انامتناهي و خوشترتيب است اولين عدد ارديناليتي انامتناهي را مشخص ميكند كه آنرا با ? نمايش ميدهيم .

اعداد ارديناليتي را ميتوان با هم جمع، ضرب يا به توان رساند، اما جمع و ضرب آنها لزوما خاصيت جابجايي ندارند يعني مثال ? =1+? ولي اين اكيدا كوچكتر از ?+1 هست و ? برابر2ضربدر هستش.اما اكيدا كوچكترازاز?.2 هست (نحوه جمع و ضرب اين اعداد را مي توانيد در مراجع مشاهده كنيد).وداريم

?={0,1,2, ...}

?+1={0,1,2,....,?

.....

كه عددصلي همه مجموعه هاي اخير همان عدد اصلي اعداد طبيعي (الف نات)هستش و مجموعه همه اعداد ارديناليتي شمارا را با
?1نشان مي دهيم وعدد اصلي آن الف يك هست.و اين اولين عدد ارديناليتي ناشماراست.

اكنون مى توان ايي مجموعه اه ور ادامه داد ومجموعه خوشترتيب اعداد اردينال مجموعه زير خواهد شد

$1, 2, \ldots, \omega, \omega+1, \omega+2, \ldots, \omega+\omega, \omega+\omega+1, \ldots$

مثال ? يعنى مجموعه همه اردينالهاى متناهى و 3 يعنى برچسب همه3 عضوى هاى خوشترتيب والى آخر

بحث اردينالها يك بحث فوق العاده پركاردر نظريه مجموعه هاست كه تعريف هاى آن در رياضيات با ابزارهايى مثل توپولوژى ، نيز آمده است و من هرچه مينويسم باز هم ميبينم قسمتهاى زيادى براى گفتن مانده براى مطالعه بيشتر به آدرسهاى كه درپايان مطلب خواهم گذاشت مى توانيد مراجعه كنيد.

در نهايت تعريف جان فون نويمان رياضيدان معاصر را از عدد اردينال ذكر ميكنيم كه مى توانيد انطباق تعاريف بالا از عدد اردينال را با تعريف فون نويمان در مثال زير تعريف ببينيد.(زندگى با رياضيات، مقاله آشنايى با اعداد اوردينال)

در اين زمينه همچنين: Why is ? the smallest ??

بايد توجه داشت كه كانتور علاوه‌بر بيان مجموعه اعداد ترانفسينى، از مفهومى با عنوان نامتناهى مطلق اى absolute infinite با نماد حرف بزرگ امگا (?)ياد مىكند كه بسط و توسعه مفهوم نامتناهى است و با مجموعه بينهايت امگا متفاوت است.((absolute infinite

[3] اومگا (بزرگ: ?، كوچك: ?; يونانى ?????) بيست و چهارمين حرف الفباى يونانى است. و در دستگاه شمارش يونانى مقدار ۸۰۰ را دارد. نام اين حرف به معنى اوى بزرگ است (? مگا، مگا به معنى بزرگ است)، كه در مقابل ميكرون است "little O" (به معناى اوى كوچك).

[4] جلسه شرح توحيد صدوق، تاريخ 26/9/1398.

[5] در نظريه مجموعه‌ها، استدلال قطرى كانتور در سال ۱۸۹۱ توسط گئورگ كانتور به عنوان يک اثبات رياضى ارائه گرديد و نشان داد مجموعه‌هاى نامتناهى وجود دارند كه اعضاى آنها در تناظر يک به يک با مجموعه اعداد طبيعى نيستند. چنين مجموعه‌هايى را «مجموعه ناشمارا» مينامند.

مجموعه غيرقابل شمارش

كانتور، در مقاله‌ى خود در سال ۱۸۹۱، مجموعه T را مطالعه كرد كه شامل همه دنباله‌هاى رقمهاى دودويى (يعنى هر رقم صفر يا يک) باشد. او با اثباتى ساختى از قضيه زير شروع مىكند:

اگر s1, s2, ... , sn شامل تمامى شمارشهاى ممكن از T باشد، آنگاه همواره عضوى از T وجود خواهد داشت كه در بين s1,S2,... نخواهد بود.

براى اثبات اين، مجموعه‌هايى از T را به شكل زير انتخاب مينماييم:

s1 =	(۰,	۰,	۰,	۰,	۰,	۰,	۰,	...)
s2 =	(۱,	۱,	۱,	۱,	۱,	۱,	۱,	...)
s3 =	(۰,	۱,	۰,	۱,	۰,	۱,	۰,	...)

s4 = (۱, ۰, ۱, ۰, ۱, ۰, ۱, ...)
s5 = (۱, ۱, ۰, ۱, ۰, ۱, ۱, ...)
s6 = (۰, ۰, ۱, ۱, ۰, ۱, ۱, ...)
s7 = (۱, ۰, ۰, ۰, ۱, ۰, ۰, ...)
...

او ساختار توالی s را با انتخاب مکمل اولین رقم در s1 انتخاب نمود (جایگزینی صفر به جای یک و برعکس)، برای انتخاب دومین رقم S به سراغ رقم دوم در s2 رفت و مکمل آن را انتخاب نمود و به همین ترتیب ادامه داد. در مثال فوق به نتایج زیر میرسیم:

s1 = (۰, ۰, ۰, ۰, ۰, ۰, ۰, ...)
s2 = (۱, ۱, ۱, ۱, ۱, ۱, ۱, ...)
s3 = (۰, ۱, ۰, ۱, ۰, ۱, ۰, ...)
s4 = (۱, ۰, ۱, ۰, ۱, ۰, ۱, ...)
s5 = (۱, ۱, ۰, ۱, ۰, ۱, ۱, ...)
s6 = (۰, ۰, ۱, ۱, ۰, ۱, ۱, ...)
s7 = (۱, ۰, ۰, ۰, ۱, ۰, ۰, ...)
...
s = (۱, ۰, ۱, ۱, ۱, ۰, ۱, ...)

با ساخت s به روش فوق به مجموعه‌ای میرسیم که با تمامی مجموعه‌های بالا متفاوت است زیرا عنصر n ام آن با عنصر n ام تمام مجموعه‌های بالا تفاوت دارد.

بر اساس این قضیه کانتور با استفاده از یک اثبات با تناقض نشان میدهد که:

مجموعه T غیرقابل شمارش است.

او برای اثبات تناقض در ابتدا فرض میکند T شمارا است. پس همه عناصر آن به شکل s1,s2,...sn قابل نمایش هستند. با اعمال قضیه قبلی به این شمارشها به توالی s میرسیم که در شمارشها موجود نیست. اما s عنصری از T بود و بنابراین باید در شمارشها باشد. این تضاد فرض اصلی را زیر سؤال میبرد بنابراین T غیرقابل شمارش است.(سایت ویکی پدیا) همچنین ملاحظه کنید: Universality and the Liar: An Essay on Truth and the Diagonal Argument

تصویر روشنتری از این برهان را در اینجا میتوانید مشاهده کنید.

در زمینه کاربرد برهان قطری در مباحث حکمت نیز مطالعه مقاله «بررسی اهمیت فلسفی برهان قطری کانتور» سودمند است.

[6] این بخش از مقاله با خدایی گام به گام را در فصل دوم این نوشتار ملاحظه خواهید کرد.

[7] جلسه شرح توحید صدوق، تاریخ 26/9/1398

[8] سه فلسفه اصلی ای مکتب تفکر در رابطه با مبانی ریاضیات پیدا شده است به اصطلاح مکتب منطق گرا، مکتب شهودگرا و مکتب صوری گرا .طبیعی است که هر فلسفه نوین مبانی ریاضیات باید ، به نحوی، با بحران کنونی درمبانی ریاضیات مقابله کند . در بخش آتی به طور

مختصر این سه مکتب فکری را مورد بررسی قرار داده و متذکر خواهیم شد که چگونه هر یک از اینها راهی برای مواجهه با تعارضهای نظریه عام مجموعه ها در پیش پا می گذارد. (تاریخ ریاضیات، ج ۲، ص ۳۲۰)

[9] تز صوری گرا این است که ریاضیات با دستگاه های نمادی صوری سر و کار دارد. در واقع ریاضیات مجموعه ای از آن مباحث مجرد تلقی می شود که در آن اصطلاحات صرفا نمادهایی هستند و احکام قواعدی متضمن این نمادها. پایه غائی ریاضیات در منطق قرار ندارد و بلکه تنها در مجموعه ای نشانه ها و نمادهای پیش منطقی و در مجموعه ای از اعمال با این نشانه ها واقع است. چون از این دیدگاه، ریاضیات عاری از محتوای ملموس و تنها شامل عناصر نمادی آرمانی است، برقراری سازگاری شاخه های مختلف ریاضیات قسمت مهم و لازمی از برنامه صوری گرایی می شود. بدون همارهای چنین برهان سازگاری، تمام مبحث اساس بی معنی خواهد شد. در تز صوری گرایی اصل موضوعی ریاضیات در بیشترین حد دنبال می شود.

مکتب صوری گرایی توسط داوید هیلبرت بعد از اتمام کارش در بررسی اصل موضوعی هندسه تاسیس شد. در مبانی هندسه اش 1899 هیلبرت روش ریاضی را از قالب مبحث اصل موضوعیهای مادی اقلیدس به قالب دقیق تر مبحث اصل موضوعیهای صوری کنونی در آورده بود. دیدگاه صوری گرا بعدا برای مقابله با بحران ناشی از پارادوکسهای نظریه مجموعه ها و به مبارزه طلبیدن ریاضیات کلاسیک به دلیل انتقادهای شهودگرایانه، به وسیله هیلبرت ایجاد شد. گرچه هیلبرت پیش از سال 1904 اصطلاحات صوری گرایانه را به کار برده بود تا بعد از سال 1920 وی و همکارانش برنیس، آکرمان، فون نویمان، و دیگران کار جدی را درباره آنچه امروزه برنامه صوری گرا نامیده می شود آغاز نکردند.

 توفیق ای شکست برنامه هیلبرت برای نجات ریاضیات کلاسیک در گرو حل مسئله سازگاری است. بری بودن از تناقض تنها به کمک برهان های ناسازگاری تضمین می شود و برهان های ناسازگاری قدیمی تر مبتنی بر تعابیر و مدل هایی است که مسئله سازگاری را از یک حوزه ریاضیات به حوزه دیگر منتقل می کند. به عبارت دیگر یک برهان سازگاری به روش مدلها صرفا برهانی نسبی است. بدین جهت هیلبرت روش مستقیم جدیدی برای مسئله سازگاری تدبیر کرد. بسیاری شبیه به اثبات انچه وضعیت هایی خاص در یک بازی بنابر قواعد آن نمی توانند در بازی پیش آیند هیلبرت امید آن را داشت تا به کمک مجموعه مناسبی از قواعد عمل برای به دست آوردن فرمول های قابل قبول از نمادهای اساسی ثابت کند که فرمول متناقضی هرگز پیش نمی آید. با نمادهای منطقی یک فرمول متناقض فرمولی که از نوع " F و نه F " است که در آن F فرمول پذیرفته شده ای از دستگاه است. اگر بتوان نشان داد که چنین فرمول متناقضی ممکن نیست آنگاه سازگاری دستگاه ثابت شده است.

 بسط افکار فوق برای آزمون مستقیم سازگاری دری ریاضیات توسط هیلبرت، نظریه برهان نامیده شد. برای دستگاه های مقدماتی معینی برهانی سازگاری فراهم شدند که آنچه را هیلبرت میل به انجام آن برای همه ریاضیات کلاسیک داشت نشان می دهد ولی در کل مسئله ناسازگاری برای دستگاه بدون چاره ماند.

 در حقیقت برنامه هیلبرت حداقل به شکلی که در اصل در ذهن او بود ظاهرا محکوم به شکست بود این حقیقت توسط کورت گودل در سال 1931 عملا قبل از انتشار مبانی ریاضی، آشکار شد. گودل به کمک روش های بی ایراد و قابل قبول برای پیروان هر یک از سه مکتب اصلی فلسفه ریاضیات نشان داد که برای دستگاه قیاسی که به حد کافی قوی شده باشد نظیر دستگاه هیلبرت برای همه ریاضیات کلاسیک اثبات سازگاری دستگاه به کمک روش های متعلق به خود آن دستگاه میسر نیست. این قضیه قابل توجه پیامد قضیه اساسی تری داشت گول ناکامل بودن دستگاه هیلبرت را ثابت کرد یعنی وی وجود مسائل "تصمیم ناپذیر" را در داخل دستگاه که

سازگاری دستگاه از آن جمله است نشان داد. این قضایا نشان می دهند که دستگاه های ریاضی که برای استخراج ریاضیات من اسب شناخته شده اند قابل اطمینان نیستند بدین معنی که سازگاری آنها را نمی‌توان با روش های متناهی داخل دستگاه صوری شده اند ثابت کرد و حال آنکه هر دستگاهی که از این لحاظ مطمئن تشخیص داده شده انمناسب است.(مقاله صوری گرایی در ریاضیات استفاده شده از مطالب کتاب تاریخ ریاضیات)

[10] پئانو نظریه ی اعداد طبیعی را اصل موضوعی ساخت و قدم اصلی را برای حسابیدن ریاضیات، یعنی تحویل ریاضیات به حساب، برداشت. وی سه مفهوم اولیه صفر، عدد و تالی را ارائه کرد (مقصود از عدد، عدد طبیعی و منظور از تالی، عدد بعدی در ترتیب طبیعی بود، مثلاً یک تالی صفر است، دو تالی یک است و قس علی هذا). سپس پنج اصل موضوع زیر (موسوم به اصول پئانو) را وضع کرد:

الف) صفر یک عدد است.

ب) تالی هر عدد، یک عدد است.

ج) صفر تالی هیچ عددی نیست.

د) هیچ دو عدد متفاوتی دارای تالی برابر نیستند.

ه) هر خاصیتی که به صفر و به تالی هر عدد دارای آن خاصیت متعلق، باشد، به همه اعداد متعلق است (اصل استقرای ریاضی). به این ترتیب می توانیم رشته اعداد طبیعی را با شروع از صفر و گذر از یک عدد مانند n به تالی آن یعنی s(n در دست داشته باشیم.

جمع به سادگی قابل تعریف است. در واقع به ازای هر m ، عدد 0+mرا برابر m قرار می دهیم و اگر m+n داده شده باشد،(m+s(nرا برابر تالی m+n یعنیs(m+n) تعریف می کنیم. ضرب نیز به طور مشابه تعریف می شود و به دنبال آن می توان همه قضایای حساب (مقدماتی) را اثبات نمود. کار پئانو اراداتی داشت، از جمله این که دستگاه قیاسی وی قابلیت پذیرفتن تعدادی نامتناهی تعبیر را داشت. یک تعبیر این است که صفر را به معنی صد، عدد را به معنای اعداد طبیعی بزرگتر ای مساوی صد و تالی را به معنای معمولی آن می گیریم. در این صورت هر پنج اصل موضوع پئانو، احکام صادقی خواهند بود (توجه کنید که صد تالی نود و نه نیست زیرا در این الگو نود و نه عدد نیست!).

بر طبق نظر راسل، در دستگاه پئانو چیزی برای تمیز دادن الگوهای متفاوت وجود نداشت. اما می دانیم « صفر» چه باید باشد، به ویژه نمی خواهیم به معنای صد باشد. دستگاهی که در آن صفر به معنای صد است به درد زندگی نمی خورد. می خواهیم اعدادمان چنان باشند که بتوانند برای شمارش اشیای معمولی به کار روند.

در 1884 فرگه به منطقیدن حساب، یعنی تقلیل حساب به منطق (و با توجه به کار پئانو، در واقع منطقیدن ریاضیات) همت گماشت و اولین مکتب ریاضی را به نام منطق گرایی، که به عقیده ی کواین یک رهیافت افلاطون گرایانه به ریاضیات بود، تأسیس کرد . هدف این مکتب تحویل ریاضیات به منطق بود، یعنی اثبات این که ریاضیات شاخه ای از منطق (جدید و نه سنتی) است.

به زعم فرگه عدد چیزی است که مشخصه اعداد است همان طور که انسان مشخصه انسان ها است. یک عدد خاص مانند 3 نمونه ای از عدد است و یک گروه سه نفری نمونه ای از عدد 3 است، و نه عدد. خود عدد

3 چیزی است که بین همه ی گردآیه های سه عضوی مشترک است. فرگه صفر را گردآیه ی متشکل از مجموعه ی تهی، 1 را گردآیه ی متشکل از همه مجموعه های تک عضوی، 2 را گردآیه متشکل از همه ی مجموعه های دو عضوی و ...تعریف کرد.

با این حال همه ی این ها، توسط راسل دوباره کشف شد. در واقع منطق گرایی در حدود 1910 توسط راسل و وایتهد تنقیح شد. این دو نفر سعی کردند نشان دهند تمام ریاضیات کلاسیک که تا آن زمان شناخته شده بود از نظریه ی مجموعه ها و این نظریه در جای خود از اصول موضوع مذکور در کتاب اصول ریاضیات آن ها مشتق می شود و بالاخره که این اصول موضوع متعلق به منطق هستند.

آن ها در ارائه ی منطق گرایی نظریه ی انواع و اصل تقلیل پذیری را به کار بردند. اما برنامه ی آن ها ناقص بود، زیرا مثلاً این اصل موضوع که مجموعه های نامتناهی وجود دارند یک حکم منطقی (یعنی حکمی با عمومیت کامل که صدقش در پرتو صورتش باشد نه محتوایش) نبود. در واقع پذیرش این اصل به خاطر آشنایی ما با مجموعه های نامتناهی مانند مجموعه اعداد طبیعی یا مجموعه نقاط فضای سه بعدی بود، یعنی بر مبنای مضمون این اصل، نه صورت آن. همین وضعیت در مورد اصل انتخاب نیز برقرار بود. مشکل دیگر این بود که فرآیند استخراج قضایا از اصول منطق، طویل، پیچده و مالال آور بود و با دید شهودی ما از ریاضیات منطبق نبود. به این ترتیب، منطق گرایی در ارائه قواعد و اصول زیر بنایی ریاضی شکست خورد.(سایت راسخون، مقاله منطق گرایی در ریاضیات)

[11] تز شهودگرا آن است که ریاضیات باید منحصراً به توسط يك عده تناهی از روشهای سازنده درباره دنباله اعداد طبیعی که به طور شهودی در نظر گرفته شده اند بنا شود. لذا مطابق این نظر در زیربنای ریاضیات شهود اولیه ای قرار دارد که بدون تردید با حس گذرایی قبل و بعد در وجود ما همراه است و به ما اجازه می دهيك چیز واحد، سپس یکی دیگر سپس یکی دیگر و همینطور تا به طور بی پایان را تصور کنیم. بدین ترتیب دنباله های بی انتها را به دست می آوریم که معروفترین آنها دستگاه اعداد طبیعی است. از این مبنای شهودی دنباله اعداد طبیعی هر شی ریاضی دیگر را باید به يك روال سازنده بنا کرد و در آن تعدادی متناهی از مراحل ای اعمال را به کار برد در تز شهود گرا بسط ریاضیات از لحاظ تکوینی تا سر حد امکان دنبال می شود.

مکتب شهودگرا) به عنوان يك مكتب (در حدود سال ۱۹۰۸ به توسط ریاضیدان هلندی ل . ا . ی . بر اوئر آغاز شد ولی برخی مفاهیم شهودگرایانه قبلا توسط کسانی چون کرونکر در سالهای (۱۸۸۵) و پوانکاره (۱۹۰۲ - ۱۹۰۶) ابراز شده بود. این مکتب با گذشت زمان تدریجاً تقویت شده، برخی از ریاضیدانان برجسته کنونی را به خود جلب کرده و تأثیر فوق العاده ای در تمام افکار مربوط به مبانی ریاضیات گذاشته است.

برخی از پیامدهای تز شهودگرا جنبه انقلابی دارند. مثلاً پافشاری بر روشهای سازنده به تصوری از وجود در ریاضیات منجر میشود که آن چیزی نیست که همه ریاضیدانان به آن اعتقاد داشته باشند برای شهودگرایان ، **هستیی که اثبات وجود آن لازم است باید در تعدادی مراحل متناهی ساختنی باشد کافی نیست که فرض عدم وجود آن هستی منجر به تناقض شود**. این بدان معنی است که بسیاری از براهین وجودی زیادی که در ریاضیات کنونی دیده میشوند برای شهودگرایان قابل قبول نیستند.

مورد مهمی از پافشاری شهودگرایان بر روشهای سازنده نظریه مجموعه هاست. از نظر شهودگرايان يك مجموعه را نمی توان به عنوان گردایه ساخته و پرداخته ای تصور کرد بلکه باید آن را به عنوان قانونی تلقی کرد که به کمک آن عناصر مجموعه را بتوان به يك روال قدم به قدم بنا کرد. این مفهوم مجموعه امکان وجود مجموعه های تناقض آمیزی مانند مجموعه همه مجموعه ها » را رد می کند. (تاریخ ریاضیات، ج ۲، ص ۳۲۴)

در این زمینه همچنین مراجعه کنید به سایت بریتاینکا: مقاله Logicism, intuitionism, and formalism

[12] جلسه سوم تاریخ اجمالی ریاضیات؛ بحران‌ها و مسائل

فصل دوم: نظریات کانتور؛ دستاویز ملحدین

محال بودن دانستن مجموعه تمام حقایق

اکنون بحث ما در استدلال منطقی محال بودن دانستن مجموعه تمام حقایق است.[1]...

در این استدلال از نظریه مجموعه‌ها و برهان قطری سازی کانتور استفاده شده ، و چون شخص نظریات کانتور را خیلی مهم میدانم برای آب و تاب بحث سراغ عبارات ریاضی دانانی که قدر او را ندانستند و او را تحقیر کردند نمیروم ، اما آنچه باور من است و بعدا هم توضیح میدهم و اشاره‌ای هم در مقاله نکته‌ای در نقطه به آن داشتم این است که نظریه مجموعه‌ها در ابتدای راه است و حیثیات دقیق در آن هنوز متمایز نشده است و شاهد آن پارادوکس راسل است ولی علیای حال پشتوانه قوی دارد و به تعبیری هیلبرت در باغ سبزی که کانتور نشان داد احدی نمیتواند ببندد اما من تاکید میکنم تنها در باغ را نشان داد و تا ورود به خود باغ هنوز مراحلی باقی است.

و احتمال میدهم همانگونه که من وقتی استدلال بیخدایان را با سوء استفاده از حرف کانتور دیدم نزد خود خندیدم اگر خود کانتور هم که به شدّت مذهبی بود حرف آنها را میدید میخندید(کانتور به شدّت مذهبی بود : تاریخ ریاضیات ترجمه محمدقاسم وحیدی اصل ج 2 ص260).

---

[1] این فصل، بخش سوم از مقاله «باخدایی گام به گام» است که در پاسخ به مقالهای از آتئیست ها با عنوان بی خدایی گام به گام تدوین شده است.

استدلال ملحدین

اما اصل استدلال:

> محال بودن دانستن مجموعه تمام حقایق
> پیشگفتار
> این استدلال یکی از استدلال‌های منطقی علیه وجود خدا هست که توسط پاتریک گریم برای نخستین بار ارائه شده است و به استدلال گریم در کتب فلسفه دین شهرت یافته است، روش کار این‌گونه برهان‌ها همان‌گونه که در برگ برهین منطقی اثبات عدم وجود خدا توضیح داده شده است نشان داده وجود تناقض میان دو ویژگی از ویژگی‌ها در تعریف فلسفی وجود خدا (خداوند چیست؟) و با استناد به اصل تناقض (تناقض چیست؟) نشان داده می‌شود که خداوند نمی‌تواند وجود داشته باشد. برخی از برهان‌های منطقی اثبات عدم وجود خدا همچون همین برهان تناقض را میان دو ویژگی نشان نمی‌دهند بلکه نشان می‌دهند یکی از ویژگی‌های خدا از لحاظ منطقی متناقض است و وجود داشتن موجودی با این ویژگی‌ها محال است.
> این برهان نیز نشان می‌دهد به دلیل اینکه دانستن تمامی حقایق از لحاظ منطقی محال است، هیچکس نمی‌تواند این حقایق را بداند، در نتیجه موجود علیمی نمی‌تواند وجود داشته باشد، پس خدا وجود ندارد.
> درک این برهان به دانشی ابتدائی از تئوری مجموعه‌ها دارد که خواننده می‌تواند از اینجا آنرا کسب کند، باقی مطالب در ارتباط با مجموعه‌ها که در این برهان از آن‌ها استفاده می‌شود در هنگام بحث برهان بطور مختصر توضیح داده خواهند شد.
> فرمول‌سیون
> 1- خداوند یک موجود علیم است. بنابر تعریف خدا.
> 2- یک موجود علیم باید تمامی اجزاء مجموعه تمام حقایق هستی را بداند. بنابر تعریف خدا و تعریف مجموعه حقایق هستی.
> 3- دانستن تمامی اجزاء مجموعه تمام حقایق هستی محال است. بنابر قضیه کانتور.
> 4- یک وجود علیم نمی‌تواند وجود داشته باشد. نتیجه از 3.
> 5- خدا نمی‌تواند وجود داشته باشد. نتیجه از 1 و 4.
> 6- خدا وجود ندارد. نتیجه از 5.
> تعاریف
> تعریف تناقض
> تعریف تناقض را در نوشتاری با فرنام "تناقض چیست؟" بیابید.
> تعریف مجموعه
> یک مجموعه از اجتماع نهادهای قابل تمایز از یکدیگر پدید می‌آید. مثلاً A را در نظر بگیرید که اجزاء آن نام چهار گل‌ها می‌باشد.
> A = { "نیلوفر", "مریم", رز"", یاسمن"}
> مجموعه بی‌نهایت
> یک مجموعه می‌تواند دارای نهایت یا بی‌نهایت باشد. بعنوان مثال مجموعه اعداد

فرد یک مجموعه بی‌نهایت است.
O = {...,-3,-1,1,3,...}
بنابر تعریف جورج کانتور (1)، مجموعه‌ای مجموعه بی‌نهایت است که
الف - مجموعه‌ای ته‌ی نباشد.
ب- رابطه‌ای یک به یک میان آن مجموعه و زیر مجموعه‌های مناسب آن وجود داشته باشد.
مجموعه مناسب
تعریف مجموعه مناسب (Proper Subset) - یک مجموعه مانند S2 تنها درصورتی زیر مجموعه مناسب مجموعه دیگری مانند S1 است. که هر عضو S2 در S1 باشد و S1 حداقل یک عضو داشته باشد که در S2 نباشد.
(2) قضیه مجموعه توانی کانتور
برای هر مجموعه X، قوت مجموعه توانی X بزرگتر از قوت مجموعه X است.
قضیه کانتور به ما می‌گوید هر قدر هم که مجموعه‌ای بزرگ باشد، باز هم می‌توانیم مجموعه‌ای بزرگتر از آن را در نظر بگیریم. این در مورد مجموعه‌های متناهی بدیهی است، اما اگر مجموعه تحت بررسی نامتناهی باشد، چندان بدیهی نیست.
دو مجموعه (و بویژه، دو مجموعه نامتناهی) را هم اندازه یعنی دارای کاردینالیته یکسان گوییم هرگاه بتوانیم تناظر یک به یکی میان اعضای دو مجموعه برقرار سازیم و در هیچ طرف هیچ عضوی باقی نماند. اگر بتوانیم نشان دهیم که میان دو مجموعه نامتناهی، هرگز نمی‌توان چنین "تناظر یک به یکی" برقرار ساخت، آن گاه می‌دانیم یکی از مجموعه‌ها باید به طور کاردینالی بزرگتر از مجموعه دیگر باشد.
کانتور برای اثبات این قضیه از "برهان قطری سازی" خود که اکنون مشهور است، استفاده کرد که اثبات از طریق برهان خلف است. یعنی فرض می‌کنیم بزرگترین مجموعه نامتناهی وجود دارد و سپس نشان می‌دهیم که باید یک مجموعه بازهم بزرگتر باشد. بنابراین، فرض کنید X مجموعه‌ای نامتناهی است و آن را چنین نمایش می‌دهیم:
.....
.....
لحظه‌ای تأمل می‌کنیم تا معنای قضیه کانتور را دریابیم. این قضیه نشان می‌دهد که برای هر مجموعه ای، مجموعه دیگری وجود دارد که به معنای خاص نوعی بزرگتری از نامتناهی بودن، بزرگتر است. بنابراین، "بزرگترین نامتناهی" هم نمی‌تواند وجود داشته باشد! بنابراین، انواع نامتناهی، "نامتناهی" هستند!

بحث
بعد از این تعاریف ابتدائی به شرح برهان خواهیم پرداخت.
یک دسته از حقایق حقایق گزاره‌ای یا قضیه‌ای هستند، که می‌توان آن‌ها را بر اساس اصل دوالانسی منطق صحیح یا غلط دانست. بعنوان مثال هرکدام از روابط ریاضی موجود بین اعداد حقیقتی هستند. یعنی 2+2=4 یک حقیقت است و همچنین 2-2=0 یک حقیقت دیگر. حال از آنجا که این حقایق قابل تمیز داده شدن از یکدیگر هستند می‌توان اجتماع آن‌ها را بصورت یک مجموعه تصور کرد.
بعنوان مثال مجموعه A را در نظر بگیرید که اعضای آن دو حقیقت یاد شده هستند.
A = { "2+2=4", "2-2=0" }
پرواضح است که به دلیل بی‌نهایت بودن مجموعه اعداد، بی‌نهایت نیز رابطه حقیقی از نوع یاد شده در میان آن‌ها وجود دارد، یعنی می‌توان مجموعه‌ای از حقایق ریاضی را تصور کرد که تمامی این حقایق را در خود گنجانیده است، نام این مجموعه را T بگذاریم.
T = { T1, T2, T3, …}

هرکدام از Tiهای موجود در این مجموعه خود یک حقیقت هستند. از آنجا که بینهایت عدد در مجموعه اعداد وجود دارد مجموعه T نیز بنابر تعریف داده شده از یک مجموعه بینهایت، مجموعهای بینهایت است.

حال یکی از ویژگیهای خدا در تعریف آن (خداوند چیست؟) علیم بودن خدا است، به این معنی که خدا بر تمامی حقایق آگاه است.

به دلیل اینکه حقایق از یکدیگر قابل تمایز هستند، اجتماع آنها را میتوان بصورت مجموعهای از حقایق نشان داد. آشکار است که تمامی حقایق موجود در هستی باید مجموعه حقایق ریاضی را نیز در خود بگنجاند و از آنجا که آن مجموعه بینهایت است، مجموعه تمامی حقایق موجود در هستی نیز مجموعهای بینهایت است. نتیجه منطقی آنکه خداوند به دلیل علیم بودن خود باید لزوماً مجموعه تمامی حقایق هستی را که آنرا نیز T فرض میکنیم بداند و در صورتی که حتی یکی از اعضای این مجموعه را نیز ندانند علیم نیست.

مرحله بعدی در این استدلال این است که نشان دهیم دانستن مجموعه T محال است. زیرا مجموعه T بنا بر قضیه کانتور قابل تصور نیست.

به یاد داشته باشید که فرض کردیم مجموعه T تمامی حقایق هستی را در بر دارد و مجموعهای بینهایت است. آشکار است که دانستن اعضای این مجموعه برای انسان میسر نیست زیرا شما هرچقدر هم که از اجزاء این مجموعه را بدانید باز هم اعضای دیگری خواهند بود که شما آنها را هنوز نمیدانید. اما ممکن است گفته شود که دانستن اعضای این مجموعه برای خدا محال نیست زیرا خدا خود نیز بینهایت است و میتواند این مجموعه را درک کند. البته این پاسخ، قانع کننده نیست زیرا بینهایت بودن خدا به خودی خود به معنی این نیست که او بتواند اعضای این مجموعه را بداند.

اما استدلال ما این نیست، همانطور که گفته شد مسئله اینجا است که بنابر قضیه کانتور که از راه برهان خلف اثبات میشود که چنین مجموعه نمیتواند وجود داشته باشد.

.....

.....

بنابر این همانگونه که قضیه کانتور نشان میدهد، مجموعه توانی "تمامی مجموعه ها" از مجموعه "تمامی مجموعه ها" بزرگتر است. بنابر این حقایقی بیش از آنچه در T وجود داشته است وجود دارند، و این یک تناقض است چون T در بر دارنده تمام حقایق هستی که هیچ حقیقتی خارج از آن وجود ندارد فرض کرده ایم، لذا با استفاده از برهان خلف نشان دادهایم که چنین مجموعهای اساسا نمیتواند وجود داشته باشد.

نتیجه آنکه مجموعهای با فرانام "مجموعه تمام حقایق هستی" وجود ندارد و چون این مجموعه وجود ندارد دانستن آن از دیدگاه معرفت شناسی (Epistemologically) محال است، و چون یک موجود علیم باید قطعاً تمامی حقایق هستی را بداند که بتواند علیمانش نامید، هیچ موجود علیمی نمیتواند وجود داشته باشد و چون هیچ موجود علیمی نمیتواند وجود داشته باشد خدا نیز نمیتواند وجود داشته باشد.

نتیجه

اگر خداوند در تعریف خود علیم است، وجود او نمیتواند جزیی از حقایق تشکیل دهنده جهان باشد و خدا نمیتواند وجود داشته باشد.

شبهات

شبهه نخست

ممکن است خداباوران این نتیجه را انکار کنند و بگویند از آنجا که خدا خود تنها خالق تمامی واقعیتها و حقایق (البته به غیر از واقعیت خودش) است، میتواند T را بداند. اما ایراد این شبهه سفسطه مصادره به مطلوب است که در آن بکار برده

شده است. مسئله اینجا است که چیزی که بنا بر تعریفش متناقض است بنا بر اصل تناقض قابل دانستن نیست و خالقی ندارد.

شب‌ه دوم

ممکن است خداباور بگوید عدم امکان‌پذیری قرار دادن مفهوم "تمام حقایق" در تعریف مجموعه به این معنی نیست که تمام حقایق وجود ندارد. در پاسخ می‌توان گفت با فرض وجود تمام حقایق هیچ دلیلی وجود ندارد که نتوان آنرا بصورت مجموعه‌های بی‌نهایت تعریف کرد، برای اینکه حقایق مجموعه‌های شوند تنها کافی است که از یکدیگر قابل تمیز دادن باشند، و اگر اجماع تمام حقایق ممکن بود، مجموعه تمام حقایق نیز ممکن می‌بود، اما از آنجا که وجود مجموعه تمام حقایق غیر ممکن است (بنابر اثباتی که صورت گرفت)، می‌توان نتیجه گرفت که "تمام حقایق" نیز غیر قابل تصور است، لذا نمی‌توان تصور کرد که علیمی وجود داشته باشد، یا بعبارت دیگر وجود علیم به دلیل عدم امکان اتحاد تمامی حقایق محال است.

پاسخ نقضی

این استدلال یک جوابهای دم دستی دارد که کارآیی آنها بیشتر در مقام مجادله است ، مثل اینکه گفته شود خدا علیم است یعنی بینهایت موجودات را میداند و دلیل شما ثابت کرد که مجموعه تمام حقائق موجود نیست پس چه تناقضی پیش میآید؟! شما که با این دلیل ثابت نکردید موجودات موجود نیستند فقط ثابت کردید بزرگترین مجموعه موجود نیست و لذا ما کلمه تمام را بر میداریم و میگوییم خداوند بینهایت موجودات را میداند ، مثل اینکه میگویید بزرگترین عدد طبیعی موجود نیست ولی بینهایت عدد طبیعی حقیقت دارد.

پاسخ حلی

اما جواب حلّی و اصلی مربوط به سؤال مهمی می‌شود که در بند هفتم نوشتار قبلی[1] مطرح کردم و گفتم رسوب ذهنی عجیب دارد ، یعنی رسوبات همراه شده با یک مفهوم که در استدلالات علمی باعث اشتباهات عجیب می‌شود ، و اگر توفیق بود از همین مطلب در برهان فرار رابطه و برهان مرجعیت مطلق و برهان از او به سوی او ، بر اثبات خداوند استفاده خواهم کرد ، و اکنون با بیان دو مقدمه آنرا توضیح می‌دهم:

[مقدمه ۱: مقابله و پیدایش مفاهیم در ذهن]

1- پیدایش و ظهور مفاهیم و معانی در بساط عقل، تنها بوسیله مقابله است ، اگر بچه از بدو تولّد هرگز تاریکی نبیند روشنایی هم برای او مفهومی ندارد ، و هر مفهومی که تنها یک مقابل دارد امر آن دائر بین وجود و عدم در ذهن است ، به مقابله می‌آید و وقتی آمد دیگر ابهام در او معنی ندارد ، ولی مفهومی که چندین مقابل دارد می‌تواند به لحاظ یکی از مقابلها در ذهن بیاید ولی تنها به وجهی ادراک شده است و هنوز وجوه دیگری دارد که تنها با مقابلهای خود ادراک می‌شود.

این مفاهیم آلات عقل در ادراکات اوست و عقل از مفاهیم واضح که تنها یک یا دو مقابل دارند و همین رمز وضوح آنهاست بسیار استفاده می‌کند ، و یکی از مهمترین آنها دو مفهوم متقابل وجود و عدم (هستی و نیستی) است ، اما اینها دو رقیبی دارند که شاید نقش بالاتری ایفا می‌کنند و آن دو مفهوم صحیح و غلط (درست و نادرست) است ، ولی اکنون با واضح شدن بسیاری از حیثیات دقیق ، جدا کردن این مفاهیم چندان مشکل نیست ، مثلا میدانیم وجود و عدم دو مفهوم فلسفی است اما صحیح و غلط دو مفهوم منطقی است و موطن اتصاف اولی خارج از ذهن و دومی در ذهن است.

[مقدمه ۲: توصیف؛ اشاره]

2- مطلبی که از نظر من بسیار با اهمیت است و کمتر در مباحث علمی روی آن تاکید می‌شود این است که ذهن با عناصر ذهنی دو رفتار دارد گاهی به وسیله آنها توصیف می‌کند و گاهی اشاره به امری می‌کند و گاهی ترکیبی بین این دو است ، مثال واضح آن کلمه زیبا است که گاهی حالت وصفی دارد و گاهی اسم است برای فردی که چه بسا زیبا هم نباشد ولی مهم آن است که وقتی ذهن در حالت اسمی از او استفاده می‌کند ولو بسیار زیبا هم باشد اصلا توجه به وصف زیبایی او ندارد (مثل مادرش که در روز بارها او را صدا می‌زند) و تنها و تنها به یک وجود خارج از ذهن اشاره می‌کند.

[وجود وصفی؛ وجود اشاری]

و مقصود اصلی از این دو مقدمه این است که گاهی ذهن به وسیله لفظ وجود توصیف می‌کند و گاهی اشاره می‌کند به امری که ادراکی شهودی از آن دارد ولی مفهومی برای آن ندارد و لذا از مفهوم وجود به جای استفاده توصیفی استفاده ابزاری می‌کند چون چاره‌ای ندارد و مناسبترین مفهوم را مفهوم «وجود» ای بردار منطقی او مفهوم «درست» می‌یابد که از آنها استفاده کند برای تنها اشاره کردن به عنصر شهودی خود.

و رمز اینکه شهود دارد اما اصلا مفهومی از آن ندارد این است که آن عنصر شهودی مقابل ندارد ولی واقعیت تردید ناپذیر است.

اکنون با یک مثال مقصود خود را توضیح میدهم: از یک شخص معمولی سؤال کنید و او را در این پارادوکس قرار دهید: ببین نان در سفره نیست ، آیا نبودن نان را به چشم خود میبینی؟ میگوید آری ، بگویید: پس این نبودن نان ، هست و نمیتوانی هستی نبودن نان را انکار کنی! از طرفی چگونه نبودن هست؟! نبودن نبود است نه بود!!

اگر دقت کنیم میبابیم اینکه میگوییم نبود نان هست یعنی واقعیت دارد و امر صحیح و درست و ثابتی است و هیچ گاه منظور ما حالت توصیفی مفهوم وجود نیست بلکه حالت اشاری آن به امور شهودی واقعیت دار است که اصلا مقابل ندارد ، حتی اگر بگوییم مقابل اینها باطل و نادرست است میبینیم نادرستی یک امر نادرست حتما درست است ، و درستی آخر ، امری شهودی است که چون مقابل ندارد قابل تبدیل به یک مفهوم ذهنی نیست لذا ذهن مفهوم مناسب آنرا انتخاب میکند و تنها به وسیله آن اشاره به آن امر شهودی میکند.

[اوسعیت نفس الامر از وجود]

از این بیان نتیجه میگیریم که **ظرف واقعیات و حقائق فراتر از ظرف وجود است** و اگر به وسیله مفهوم وجود اشاره به ظرف حقائق کنیم منظور ما از این که (حقائق هستند) این است که ما آنها را باور داریم و قابل تشکیک نیستند نه اینکه آنها را به موجودیت وصفی که مقابل عدم است متصف کنیم ، و تاکید میکنم که واقعیت امر این است که **به وسیله مفهوم وجود اشاره میکنیم** و این حرف را دقیق نمیدانم که بگوییم در مفهوم وجود توسعه میدهیم ، خیر ، اگر توسعه بدهیم باز مفهوم جدیدی به دست میآید که ناچار باید مقابل داشته باشد و این هر چند در مرحله اول سیر در حقائق میتواند کارآیی داشته باشد ولی در نهایت نمیتواند آن باور ما به امر شهودی که اصلا مقابل ندارد را تبیین کند.

---

[1] عبارت بند هفتم و بندهای بعد از آن:

«۷- سؤالی بسیار مهم که رسوب زدایی حیرت آور دارد: اگر اصل تناقض درست است آیا موجود هم هست؟ اگر نیست چرا؟

8- چگونه این احتمال را دفع کنیم که شاید خود این اصل مشتمل بر تناقض باشد؟ ولی هنوز معلوم نشده است؟

9- آیا اصل تناقض را ذهن ما درک می کند یا فقط ادّعا می کند؟ اگر درک می کند چه را درک می کند؟

10- آیا محور اصل تناقض بر وجود و عدم است یا درست و غلط؟

قبل از ادامه بحث این نکته را متذکّر شوم که مقصود من انکار اصل تناقض نیست بلکه ضابطه مند کردن و حاکم کردن آن در محدوده خودش است نه اینکه به عنوان یک اصل فرا منطقی همه را به دنبال خود بکشد.(مقاله با خدایی گام به گام، بخش دوم)

بررسی فقرات استدلال

اکنون به بررسی فقرات استدلال محال بودن دانستن مجموعه تمام حقائق میپردازیم:

> فرموالسیون
> 1- خداوند یک **موجود** علیم است. بنابر تعریف خدا.
> 2- یک موجود علیم باید تمامی اجزاء مجموعه تمام حقایق هستی را **بداند**. بنابر تعریف خدا و تعریف مجموعه حقایق هستی.
> 3- دانستن تمامی اجزاء **مجموعه تمام حقایق هستی** محال است. بنابر قضیه کانتور.
> 4- یک وجود علیم نمیتواند وجود داشته باشد. نتیجه از 3.
> 5- خدا نمیتواند وجود داشته باشد. نتیجه از 4 و 1.
> 6- خدا وجود ندارد. نتیجه از 5.

کلماتی که زیر آنها خط کشیده شده مورد عنایت است ، بعدا إن شاء الله ثابت میکنم :

1- خداوند موجود به وجود وصفی نیست

2- دانستن دو نوع است دانستن شهودی و دانستن شناختی منطقی

3- اما آنچه فعلا محور سخن است مجموعه تمام حقائق است.

> تعریف مجموعه
> یک مجموعه از اجتماع نهادهای قابل تمایز از یکدیگر **پدید** میآید.

هر چند مجموعه را تعریف نمیکنند و از مفاهیم ابتدایی به حساب آورده و تعریف ناشده رها میکنند و به نظر من این نقص بسیار بزرگی است ولی چون در اینجا تعریف کردهاندمن هم مغتنم شمرده و این سؤال را میپرسم: منظور از کلمه پدید آمدن در این تعریف چیست؟ یعنی در خارج ذهن موجود میشود؟ یا در ذهن موجود میشود؟ و اگر در ذهن موجود میشود کنش ذهن در ارتباط با آن درک چیزی است یا فرض و ادّعای چیزی است؟ یا موارد مختلف است و نیازمند یک ضابطه در دسته بندی مجموعه هاست؟

> یک دسته از حقایق حقایق گزارههای یا قضیههای هستند، که میتوان آنها را بر اساس اصل دوالانسی منطق صحیح یا غلط دانست. بعنوان مثال هرکدام از روابط ریاضی موجود بین اعداد حقیقتی هستند. یعنی 4=2+2 **یک حقیقت** است و

> همچنین 0=2-2 **یک حقیقت دیگر**. حال از آنجا که این **حقایق قابل تمیز داده شدن** از یکدیگر هستند میتوان اجتماع آنها را بصورت یک مجموعه تصور کرد.

در نهایت در این دلیل گفته میشود : مجموعه تمام حقائق وجود ندارد اجازه بدهید ما از همین حالا سؤال کنیم اینکه میگویید:

یعنی(4=2+2 یک حقیقت است) آیا این حقیقت موجود است؟

اگر معدوم است پس چگونه میگویید تمایز دارد؟!

اگر موجود است چون **یک حقیقت** است پس به ذهن ما وابسته نیست هیچ ذهنی هم اگر نبود این **یک حقیقت** بود ، پس اگرموجود است در کجا موجود است؟ بر مبنای مادی، موجود مجرّد از ماده قائل نمیشوند، در کجا میخواهید سراغ این حقیقت واضح ریاضی بروید؟

بخصوص که در بحث (برهان پنهانی الهی، ای ناباوری) این عبارت را میخوانیم:

> آیا تابحال به این قضیه فکر کردهای که،
> الف- هرچیزی که وجود دارد آشکار است!
> ممکن است شما بگویید، خیر بسیاری از چیزها وجود دارند که آشکار نیستند، مثلا امواج رادیویی و مادون قرمز وجود دارند اما آشکار نیستند. در پاسخ به این اعتراض باید بگویم که شما از کجا میدانید امواج رادیویی و مادون قرمز وجود دارند؟ آیا غیر از این است که اثر مشتق شده از وجود آنها را دیدهایی و یا با هر ارگان حسی دیگری وجود آنرا دریافت حسی کرده اید؟ ممکن است از لحاظ فیزیکی بتوان گفت منظور از آشکار بودن همان "**قابل اندازه گیری کردن**" باشد، امواج رادیویی و مادون قرمز از جنس انرژی موجی هستند و دوره و طول موج آنها قابل اندازه گیری کردن است، ما از آنجایی که این امواج بر ما آشکار شدهاندیعنی توانستهایم آنها را اندازه بگیریم و بسنجیم به وجود آنها پی بردهایم. پس ما به نحوی توانستهایم وجود این چیزها را دریافت حسی کنیم، پس وجود چنین چیزهایی نمیتواند مثال نقضی برای الف باشد.

آیا حقائق ریاضی اگر موجود هستند چگونه قابل اندازه گیری هستند؟ آیا سیستمهای ریاضی محض و دستگاههای هندسی مستقل چه اقلیدسی و غیر اقلیدسی که صحیح هستند و از حقائق به شما
میآیند قابل اندازه گیری هستند

این سؤال جدّی است و بر هر سه مبنای فلسفه ریاضی (منطق گرایی ، صورت گرایی ، شهود گرایی
به پاسخ نیاز دارد

جواب من این است که حقائق موجود هستند اما نه به وجود وصفی بلکه به وجود اشاری که توضیح آن
گذشت ، پس مستقل از ذهن هستند و ذهن تنها آنها را درک میکند و آن هم درکی شهودی که مقابل آن
عدم نیست بلکه ان صحیح که خود مفهومی اشاری است میباشد و در نهایت ان صحیح بودن ان صحیح
هم امری شهودی است که اصلا مقابل ندارد و کسی که به دنبال مقابل برای آن باشد دچار تسلسل
میشود و از ادراک ذهنی ساده که همه از آن برخوردارند فاصله میگیرد و در نوشتار قبلی گذشت که
این صحیح آخری اساسا مقابل ندارد (یعنی اینکه ان صحیح بودن ان صحیح حتما صحیح است)
(صحیح بودن صحیح حتما صحیح است)

> بعنوان مثال مجموعه A را در نظر بگیری که اعضای آن دو حقیقت یاد شده هستند.
> A = { "2+2=4", "2-2=0" }
> پرواضح است که به دلیل بینهایت بودن مجموعه اعداد، بینهایت نیز رابطه حقیقی از نوع یاد شده در میان آنها وجود دارد، یعنی میتوان مجموعهای از حقایق ریاضی را تصور کرد که **تمامی** این حقایق را در خود گنجانیده است، نام این مجموعه را T بگذاریم.

از نکات جالب سلسله مراتبی بودن حقائق است و در این مثال ما میتوانیم با تعریف عدد و عمل جمع و تفریق برای اعضاء ای رفتار مجموعه، فرمول ارائه بدهیم که خود یک حقیقت بیش نیست.

> حال یکی از ویژگیهای خدا در تعریف آن (خداوند چیست؟) علیم بودن خدا است، به این معنی که خدا بر تمامی حقایق **آگاه** است.

آگاهی بر دو نوع است شهودی و شناختی که بعدا توضیح خواهم داد.

> مرحله بعدی در این استدلال این است که نشان دهیم دانستن مجموعه T محال است. زیرا مجموعه T بنا بر قضیه کانتور قابل **تصور** نیست.
> به یاد داشته باشید که فرض کردیم مجموعه T تمامی حقایق هستی را در بر دارد و مجموعهای بینهایت است. آشکار است که دانستن اعضای این مجموعه برای **انسان میسر** نیست زیرا شما هرچقدر هم که از اجزاء این مجموعه را بدانید باز هم اعضای دیگری خواهند بود که شما آنها را هنوز نمیدانید. اما ممکن است گفته شود که دانستن اعضای این مجموعه برای خدا محال نیست زیرا خدا خود نیز بینهایت است و میتواند این مجموعه را درک کند. البته این پاسخ، **قانع کننده نیست** زیرا بینهایت بودن خدا به خودی خود به معنی این نیست که او بتواند اعضای این مجموعه را بداند.
> اما استدلال ما این نیست، همانطور که گفته شد مسئله اینجا است که بنابر قضیه کانتور که از راه برهان خلف اثبات میشود که چنین مجموعه نمیتواند **وجود** داشته باشد.

چهار خط کشیده را ملاحظه کنید:

اول تصور کردن مربوط به علم شناختی است نه شهودی.

ثانیا تصور تک تک اعضای مجموعه اگر ممکن نباشد منافاتی ندارد که ما تمام مجموعه را از طریق تعریف و فرمول خاص مجموعه بدانیم و فلاسفه نام این را علم به جزئی از طریق علم به کلی میگذارند.

ثالثا استدلال کننده باید قانع کند اشکال کننده را ، یعنی باید احتمال اشکال کننده را دفع کند تا برهان او تام باشد ، نه اینکه به اشکال کننده بگوید این احتمال تو من را قانع نمیکند ، پس کجا رفت بیخدایی مثبت گرا؟؟!! این به بیخدایی منفیگرا باز گشت!

راب‌ع اکنون رسوب زدایی که در مفهوم وجود کردم بسیار کارآیی دارد ، می‌گویی‌دی چنین مجموعه نمی‌تواند وجود داشته باشد ، می‌گویی‌م **اگر** منظور مجموعه تمام حقائق است در ابتدای امر یعنی قبل از در نظر گرفتن قوت مجموعه توانی این مجموعه ، می‌پرسیم آیا **وجود وصفی** نمی‌تواند داشته باشد که مقابل آن عدم است ای **وجود اشاری شهودی** که در تمام حقائق جریان داشت؟ هیچ حقیقتی وجود وصفی ندارد ، اما همین مجموعه خود از حقائق است و امر ثابت و صحیحی است و اشکالات در وجود ان متناهی در وجود وصفی جاری است و گرنه همه می‌پذیریم که حقائق صحیح و ثابت هستند و لو : بی‌نهایت بی‌نهایت به توان بی‌نهایت حقیقت داشته باشیم ، و تازه این اول راه است که ذهن ما می‌خواهد با امر مجرّد از ماده آشنا شود ، **و اگر** منظور بزرگ‌ترین مجموعه است که قوت مجموعه توانی هم در نظر گرفته شود هم جواب نقضی و هم حلی دارد که در بررسی فقرات بعدی توضیح می‌دهم.

ادامه بررسی استدلال محال بودن دانستن مجموعه تمام حقایق:

گفته شد:

> لحظه‌ای تأمل می‌کنیم تا معنای قضیه کانتور را دریابیم. این قضیه نشان می‌دهد که برای هر مجموعه ای، مجموعه دیگری وجود دارد که به معنای خاص نوع "بزرگ‌تری از امتناهی بودن، بزرگ‌تر است. بنابراین، "**بزرگ‌ترین** امتناهی" هم نمی‌تواند وجود داشته باشد! بنابراین، انواع امتناهی، "امتناهی" هستند!

دقت کنید که از این بیان ، بی‌نهایت عدد ترانسفینی ثابت می‌شود که همه حقیقتی ریاضی است و ثابت و صحیح است هر چند نظریه مجموعه‌ها نتواند آن‌ها را صید کند ، مانند اینکه بی‌نهایت عدد طبیعی حقیقت دارد اما یک عدد که بی‌نهایت باشد وجود ندارد و نظریه اعداد نمی‌تواند یک چنین عددی به دست ما دهد.

> به دلیل اینکه حقایق از یکدیگر قابل تمایز هستند، اجتماع آن‌ها را می‌توان بصورت مجموعه‌ای از حقایق نشان داد. آشکار است که تمامی **<u>حقایق موجود در هستی</u>** باید مجموعه حقایق ریاضی را نیز در خود بگنجاند و از آنجا که آن مجموعه بی‌نهایت است، مجموعه تمامی **حقایق موجود در هستی** نیز مجموعه‌ای بی‌نهایت است. نتیجه منطقی آنکه خواندن به دلیل علیم بودن خود باید لزوماً مجموعه تمامی **حقایق هستی** را که آنرا نیز T فرض می‌کنیم بداند و در صورتی که حتی یکی از اعضای این مجموعه را نیز ندانند علیم نیست.

در نوشتار قبلی توضیح دادم که عبارت **حقائق موجود در هستی** آغشته به چه رسوباتی است.

> بنابر این همانگونه که قضیه کانتور نشان می‌دهد، مجموعه توانی "تمامی مجموعه ها" از مجموعه "تمامی مجموعه ها" بزرگ‌تر است. بنابر این حقایقی بیش از **مجموعه** آنچه در T وجود داشته است وجود دارند، و این یک تناقض است چون T را تمام حقایق هستی که هیچ حقیقتی خارج از آن وجود ندارد فرض کرده ایم، لذا با استفاده از برهان خلف نشان داده‌ایم که چنین **مجموعه‌ای** اساسا نمی‌تواند وجود داشته باشد.

> نتیجه آن‌که **مجموعه‌ای** با فرمان "**مجموعه** تمام حقایق هستی" وجود ندارد و چون این **مجموعه** وجود ندارد دانستن آن از دیدگاه معرفت شناسی (Epistemologically) محال است، و چون یک موجود علیم باید قطعاً (...) تمامی حقایق هستی را بداند که بتواند علمش را نمی، هیچ موجود علیمی نمی‌تواند وجود داشته باشد و چون هیچ موجود علیمی نمی‌تواند وجود داشته باشد خدا نیز نمی‌تواند وجود داشته باشد.

[بیان مغالطه موجود در استدلال]

اکنون نوبت آن است مغالطه‌ای که در این بیان است را آشکار کنیم:

ملاحظه کنید چندین بار کلمه **مجموعه** در مقدمات به کار رفته و در وقت نتیجه گیری کلمه **مجموعه** حذف شده و به جای آن حکم برای عضوهای مجموعه ثابت شده (که من به جای کلمه حذف شده سه نقطه گذاشته ام)، لکن چون **مجموعه** تمام حقائق هستی وجود ندارد پس دانستن این **مجموعه** محال است پس یک موجود علیم نمی‌تواند **مجموعه** تمام حقائق هستی را بداند ولی چه مانعی دارد که **خود حقائق** را بداند ، و لازم است برای توضیح این مغالطه اشاره‌ای تاریخی ذکر کنم:

آنها که آشنا به تاریخ نظریه مجموعه‌ها هستند می‌دانند که در ابتدای امر که به هر نحو دلخواه مجموعه انتخاب می‌شد و هنوز خوش تعریفی مجموعه مطرح نبود پارادوکسها پدید آمد و معلوم شد تعریف بعض مجموعه‌ها مشتمل بر تناقض است و این تناقض تاثیری در واقعیت عضوهای آن مجموعه نداشت بلکه اشکال در عضویت و تشکیل مجموعه برای آنها بود و لذا به جای **نظریه طبیعی مجموعه‌ها** ریاضی دانان سراغ **نظریه اصل موضوعی مجموعه‌ها** رفتند تا از این‌ها جلوگیری کنند.

[پاسخ جدلی]

قبل از جواب حلی می‌توان جوابی جدلی داد که فرق است بین این‌که عضوهای یک مجموعه خود مجموعه باشد و بین این‌که عضوها غیر مجموعه باشد ، چون در اولی اجتماع فقط به فرض است و واقعیت ندارد ، و همچنین عضوهای یک مجموعه با زیر مجموعه‌های آن تفاوت می‌کند ، بنابر این در مجموعه‌ای که اجتماع در آن فرضی باشد علم به عضوهای مجموعه تعلق می‌گیرد نه به اجتماع فرضی آنها و نه به زیر مجموعه‌های فرضی ، مثلا پنج نفر معین را به عنوان یک مجموعه در نظر بگیرید کسی که این پنج نفر را می‌شناسد می‌توانیم بگوییم عالم به اینها است ولی علم به این‌که شما آن پنج نفر را به عنوان یک مجموعه در نظر گرفته‌اید نداشته باشد و همچنین شما که عضوهای مجموعه خود را می‌دانید می‌توانیم بگوییم عالم به این مجموعه هستید نه چند علم به زیر مجموعه‌های ممکن آن نداشته باشید ، به همین بیان مثلا علم می‌تواند تعلق بگیرد به کاردینال الف که در قبال آن اعداد حقیقی قرار می‌گیرند چون عضوها و عناصر مجموعه فرضی نیستند بلکه حقیقت دارند اما علم به کاردینال پس از آن که تنها از قوت مجموعه توانی آن حاصل شده باشد لازم نیست تعلق بگیرد چون صرف فرض است ، به خلاف این‌که کاردینال بعدی متعلق به مجموعه‌ای باشد که عضوهای آن خود مجموعه فرضی نباشد ، و این جواب به این جمله استدلال آنها مربوط می‌شود: ([illegible] *T* [illegible] مجموعه توانی ، حقیقتی را **اضافه** نمی‌کند چون جز فرض زیر مجموعه‌های یک مجموعه چیزی نیست.

[پاسخ صحیح حلّی]

اما جواب صحیح حلّی آن است که تمام سلسله بی‌نهایت اعداد ترانسفینی حقیقت دارد و کانتور آنها را کشف کرده نه فرض کرده باشد و واقعا کاردینال مجموعه توانی هر مجموعه بزرگتر از کاردینال خود مجموعه است و این یک حقیقت است که قضیه کانتور آن را اثبات کرده است ، و نتیجه آن‌که بزرگترین مجموعه و بزرگترین کاردینال معنی ندارد ، و دقت کنید که چون سلسله

کراندیانلها بینهایت است بزرگتریِن کراندیانل وجود ندارد و از این نمیتوان نتیجه گرفت که چون بزرگتریِن کراندیانل نداریم پس سلسله بینهایت کراندیانلها وجود ندارد ، مانند اینکه چون بینهایت عدد طبیعی حقیقت دارد پس یک عدد که بینهایت باشد وجود ندارد نه اینکه چون یک عددی که بینهایت باشد نداریم پس سلسله بینهایت اعداد طبیعی هم نداریم ، و این جواب به این جمله استدلال آنها مربوط میشود: ([illegible]) میشود اینکه این **فرض** ما اشتباه بوده و مشتمل بر تناقض است نه اینکه بینهایت مجموعه با کراندیانل خاص خود واقعیت ندارد ، و توضیح بیشتر در بررسی شبهه دومی که ذکر کردهاندخواهد آمد.

> شبهه نخست
> ممکن است خداباور این نتیجه را انکار کند و بگوید از آنجا که خدا خود تنها خالق **تمامی واقعیتها و حقایق** (البته به غیر از واقعیت خودش) است، میتواند T را بداند. اما ایرادِ این شبهه سفسطه مصادره به مطلوب است که در آن بکار برده شده است. مسئله اینجا است که **چیزی** که بنا بر تعریفش متناقض است بنا بر اصل تناقض قابل دانستن نیست و خالقی ندارد.

معلوم شد که در تعریف **مجموعه همه حقائق** تناقض است و در عین حال بینهایت مجموعه حقیقت دارد که میتواند معلوم خداوند باشد و ملاحظه میکنید که چگونه مجموعه با عضوهای آن جاگذاری شده است.

> شبهه دوم
> ممکن است خداباور بگوید عدم امکانپذیری قرار دادن مفهوم "تمام حقایق" در تعریف مجموعه به این معنی نیست که تمام حقایق وجود ندارد. در پاسخ میتوان گفت با **فرض وجود** تمام حقایق **هیچ دلیلی** وجود ندارد که نتوان آنرا بصورت مجموعهای بینهایت تعریف کرد، برای اینکه حقایق مجموعهای شوند **تنها کافی** است که از یکدیگر قابل تمیز دادن باشند، و اگر اجماع تمام حقایق ممکن بود، مجموعه تمام حقایق نیز ممکن میبود، اما از آنجا که وجود **مجموعه** تمام حقایق غیر ممکن است (بنابر اثباتی که صورت گرفت)، میتوان نتیجه گرفت که "**تمام حقایق**" نیز غیر قابل **تصور** است، لذا نمیتوان تصور کرد که علیمی وجود داشته باشد، ای بعبارت دیگر وجود علیم به دلیل عدم امکان اتحاد تمامی حقایق محال است.

اول: کلمه [illegible] استدلال کنندهٔ **وجود** تمام حقائق را منکر میشود و این همان مغالطهای است که جواب حلی آن را دادم.

ثانیا: چرا هیچ دلیلی ندارد؟!! دلیل اینکه حقائق وجود دارد اما نمیتوان آنها را به صورت یک مجموعه در نظر گرفت این است که ما یک کراندیانل ترانسفینی پایانی نداریم در حالی که هر مجموعه یک کراندیانل خاص خود را دارد ، پس ما بینهایت مجموعه داریم که ممکن نیست آنها را در یک مجموعه مرجع جای داد و این ممکن نبودن صدمهای به واقعیت آن بینهایت مجموعه نمیزند.
ثالثا: اینکه: ([illegible]) تفصیلی در ذهن منظور است در این صورت مجموعه اعداد طبیعی هم تصور آن ممکن نیست ، و اگر ادراک عقلانی منظور است میگوییم درک عقلانی حقائق هیچ وابسته به این نیست که آنها را در

مجموعه قرار دهیم ، و اگر دقت کنیم می‌بینیم کانتور ادراک عقلانی **بی‌نهایت** کاردینال ترانسفینی را به ریاضی دانان عرضه کرد در حالی که **مجموعه** تمام آنهاها نمی‌تواند وجود داشته باشد.

رابع: تصور از نوع ادراک شناختی است و علم خداوند از نوع ادراک شهودی است که توضیح خواهم داد .

بررسی سه بحث باقی ماندە

در ادامه بررسی استدلال **محال بودن دانستن مجموعه تمام حقایق** سه بحث باقی ماندە را میآورم:

1- دو نوع آگاهی

ادراک کە کشف و حضور چیزی درک شدە است نزد عالم بە آن ، بر دو نوع است: ای خود شیئ حاضر میشود و ای صورت ادراکی آن ، مثال وقتی شما بە یک ساعت نگاە میکنید خود ساعت فیزیکی خارجی در ذهن شما حاضر نشدە است بلکە تنها ادراکی ذهنی از او دارید اما وقتی احساس گرسنگی میکنید خود حالت گرسنگی را مییابید و در اینجا یک صورت ادراکی واسطە بین شما و حالت گرسنگی نیست و ای وقتی ساعت را دیدی و چشم خود را بستید و صورت ساعت را با چشم بستە در ذهن خود حاضر کردید این صورت ذهنی ساعت ، خودش در ذهن شما حاضر است و شما بە واسطە یک ادراک ذهنی دیگر او را ادراک نکردە اید.

نکتە مهم در اینجا یک ضابطە برای تمیزی دادن ادراک شهودی از ادراک شناختی و منطقی است ، ادراک شهودی از سنخ قضیە نیست موضوع و محمول ندارد ، حال بچە را در نظر بگیرید در ابتدای امر وقتی گرسنە میشود احساس گرسنگی میکند و گریە میکند اما هیچ ادراک نمیکند من گرسنە هستم ، یک ادراک نزدیک و فراگیر نسبت بە احساس کنندە کە خودش است و حالت احساس شدە کە گرسنگی باشد دارد ولی هنوز تحلیل نشدە و بە صورت قضیە در نیامدە و موضوع من و محمول گرسنەام تشکیل نگردیدە است و پس از مدتی کە در ادراک قویتر شد و ذهن او شکوفایی پیدا کرد این علم شهودی او قابلیت تبدیل بە یک علم حصولی و منطقی پیدا میکند و همراە ادراک شهودی گرسنگی خودش ، یک ادراک منطقی بە صورت قضیە دارد کە من گرسنە هستم ، و توضیح مراحل این شکوفائی ذهنی مقام دیگری دارد.

اینها مقدمە و مثال بود برای نزدیک شدن ذهن ما بە نحوە علم خداوند و اینکە علم خدا علم منطقی نیست ، خدا ذهن ندارد ، تکاملی ادراکی ندارد ، قضیە منطقی در علم او تشکیل نمیشود ، تمام حقائق بە همان وجود واقعی خود نزد او حاضر هستند نە اینکە واسطە در کار باشد و خدا آنها را بە وسیلە یک صورت علمی دیگر ادراک کند ، و در برهان مرجعیت مطلق ذکر خواهم کرد کە حضور همە حقائق نزد خداوند بە جهت این است کە همگی از او منتشی هستند.

2- خدا و بینهایت بودن

بینهایت ترکیبی از حرف نفی و نهایت است و نهایت حد و پایان است و آن بە خودی خود معنی ندارد مگر وصف برای چیزی باشد ، مثال پایان طول ای عرض ای عمق ای حرکت ای شمارش ای هر امر دیگر ، و نکتە مهم آن است کە یک چیز میتواند از حیثی بینهایت باشد و از حیث دیگر متناهی

باشد مثل مجموعه اعداد طبیعی از حیث ابتدا محدود است و از حیث انتها ان محدود است ولی مثل مجموعه اعداد صحیح از هر دو جهت نامحدود است.

و این تفاوت حیثیات به قدری دقیق است که گاهی قرنها طول میکشد تا نزد نوابغ بشر خود را نشان دهد ، مثلا امروزه میگوییم ویناییان حرف کنونی ما را تناقض میدیدند که فضایی متناهی باشد اما بیکران! اما امروزه این حیثیات جدا شده است و براحتی میپذیریم که هندسه اقلیدسی تنها هندسه سازگار نیست ، و در عصر ما ادعای وجود تناقض ای عدم تناقض کار ساده‌ای نمینماید بلکه بر عکس اثبات ناتوانی از اثبات آن در مثل قضیه گودل به چشم میخورد.

اکنون به یک مثال توجه کنید : یک خط بینهایت در نظر بگیرید این خط فقط و فقط طول است پس از حیث عرض محدود است اما یک سطح در نظر بگیرید که طول آن بینهایت ولی عرض آن یک سانتی متر است این هم از حیث عرض محدود است اما تفاوت این محدودیت با محدودیت قبلی در چیست؟ این محدودیت یعنی سیر ادامه پیدا نمیکند و به مرز میرسیم اما محدودیت قبلی یعنی اصلا عرض برای او مطرح نیست از حیث عرض کمبود ذاتی دارد نه کمبود سیری ، و بنابر این یک کره‌ای را که بینهایت فرض بگیریم نه محدودیت ذاتی از حیث طول و عرض و عمق دارد و نه محدودیت سیری ، اما جالب است که همین کره بینهایت از حیث بعد چهارم محدودیت ذاتی دارد ، پس اگر او را در فضای نظریه نسبیت مطرح کنیم محدودیت ذاتی او از حیث بعد چهارم از بین میرود و سخن از محدودیت سیر پیش میآید.

حال اگر صحبت از تنها چهار بعد نباشد و مثلا بینهایت بعد مطرح باشد پس ما نسبت به هر یک ، محدودیت ذاتی خواهیم داشت و محدودیت ناشی سیری ، اما نکته‌ای که **اساس** حرف من است این است که وقتی میگوییم خط از حیث ذاتش نسبت به عرض محدود است چرا به خود اجازه میدهیم بگوییم محدود است؟ بگوییم نه محدود است نه نامحدود ! ، جواب این است که چون میبینیم قابلیت حیثیت عرض را دارد ، و به ازاء این قابلیت، فعلیتی ندارد پس محدود است ، اما یک حقیقت ریاضی حسابی مثل دو و دو چهار آیا از حیث عرض محدود است؟ نه میتوان گفت محدود است و نه میتوان گفت نامحدود است بلکه بلی و راست از حیثیت عرض.

و همچنین مثلا این حقیقت ریاضی ثابت شده که عدد پی عددی متعالی است آیا از حیث طول یا عرض یا عمق یا بعد چهارم محدود است یا نامحدود؟ واضح است که از این حیثیات مطلق است و بلگی دارد ، و اگر بگوییم هر جا بروی ، در جهتهای شش گانه تا بینهایت سیر کنی ، همه جا عدد پی متعالی است منظور ما این نیست که این حقیقت ریاضی که متعالی بودن عدد پی باشد از حیث طول و عرض و عمق بینهایت است بلکه منظور این است که این حقیقت از حیثیت بعد را است و فرابعد است نه اینکه مثل نقطه بی‌بعد است و نه مثل یک فضای اقلیدسی بینهایت است.

و اسماء و صفات حسنای الهی هر چند مِثل ندارد اما مَثَل دارد ، و اگر در مورد خداوند گاهی تعبیر وجود مطلق یا بینهایت به کار میرود منظور همین را بودن از قابلیت حیثی یا حدی است نه اینکه منظور این باشد که خداوند این حیثیات را به طور بینهایت دارد که مثلا گفته شود در هر یک از بینهایت بعد ، بینهایت است.

3- انواع مجموعه

به تعریفی که از مجموعه ارائه شده بود به دقت نگاه کنید :

> تعریف مجموعه
> یک مجموعه از اجتماع نهادهای قابل تمایز از یکدیگر پدید میآید.

هر کدام از دو کلمه اجتماع و نهاد بر چند قسم است :

اجتماع : ای حقیقی است ای فرضی که هر کدام تقسیماتی میتواند داشته باشد مثلا فرضی میتواند اعتباری باشد یعنی قراردادی استاندارد و عمومی باشد و میتواند فرض دلخواه باشد. منظور از حقیقی امری واقعی است که کنش ذهن در ارتباط با آن فقط و فقط ادراک است ، و منظور از اعتباری امری است که متکی به توافق و قرار داد است مثلا توافق بر اینکه نصف النهار گرینویچ مبدء باشد پس بعض شهرها طول شرقی و بعضی دیگر طول غربی پیدا میکنند و بدون آن توافق ای نظیر آن ، چنین مجموعهای نخواهیم داشت هر چند شهرها به جای خود باقی هستند ، و فرضی آن است که همه چیز آن به ذهن شخص وابسته است.
نهاد : حقیقتی ثابت ، حقیقتی موجود ، حقیقتی معدوم ، امری فرضی ، امری انتزاعی ، امری اعتباری.

و این هم چند مثال :

1- اجتماع حقیقی و نهاد حقیقتی ثابت : مجموعه اعداد حقیقی.

2- اجتماع حقیقی و نهاد حقیقتی موجود : مجموعه همه سلولهای بدن یا برگهای یک گل.

3- اجتماع حقیقی و نهاد حقیقتی معدوم : مجموعه همه مثلثهایی که مجموع زوایای آنها 180 درجه است اگر هندسه عالم اقلیدسی نباشد.

4- اجتماع حقیقی و نهاد اعتباری : مجموعه همه محکومیتهای قضائی.

5- اجتماع حقیقی و نهاد فرضی : مجموعه همه چیزهایی که در تعریف آنها تناقض است مثل مثلثی که چهار ضلع دارد.

6- اجتماع حقیقی و نهاد انتزاعی : مجموعه همه تضایف ها.

7- اجتماع اعتباری و نهاد حقیقتی موجود : مجموعه همه شهرهایی که طول جغرافیایی شرقی دارند.

8- اجتماع اعتباری و نهاد هم اعتباری : مجموعه همه قاچهای شرقی.

9- اجتماع اعتباری و نهاد فرضی : مجموعه همه کلان شهرهای با طول جغرافیایی 175 درجه شرقی.

10- اجتماع فرضی و نهاد حقیقتی موجود : مجموعه همه حبوبات و شن ها.

11- اجتماع فرضی و نهاد اعتباری : مجموعه همه طول بلاد و طول کواکب.

12 اجتماع فرضی و نهاد هم فرضی : مجموعه همه مثلثها و داریههای چهار ضلعی.

اگر در این جهات تامل کنید سؤالات مختلفی راجع به مجموعه تهی در نظریه مجموعهها به ذهن شما خواهد آمد که کاشف از ناراسائی اصل موضوع مجموعه تهی به این صورت فعلی است.

آیا وجود یک دانای مطلق (علیم) ممکن است؟

یکی دیگر از استدلالات بیخدایان مثبتگرا بر نفی وجود خدا : آیا وجود یک دانای مطلق (علیم) ممکن است؟ میباشد:

> آیا وجود یک دانای مطلق (علیم) ممکن است؟
> فرمولاسیون
> 1- محدود کردن **دانش** محال است.
> 2- برای اینکه موجودی علیم باشد باید **دانش** را محدود کند.
> 3- هیچ موجود علیمی نمیتواند وجود داشته باشد.
> 4- خدا وجود ندارد.

اساس مغالطه به بند دوم کلمه باید مربوط میشود ، و به کلمه **دانش** در بند یک و دو توجه کنید و ببینید بعدا چند جور معنی میشود.

> بحث
> ایده اصلی این برهان از نظر ویتانشتاین (Wittgenstein) (1) است که در کتاب تراکتاتوس (Tractatus) آورده است. او در آنجا گفته است، "کسی نمیتواند بر اندیشه نهایتی قرار دهد"، زیرا برای اینکه ما بتوانیم اینکار را بکنیم "باید بتوانیم به در دو طرف این نهایت را تفکر کنیم، یعنی باید بتوانیم فکر نکردنی را تفکر کنیم". (2) آنچه من در این برهان به آن خواهم پرداخت این است که علیم (3) بودن دقیقاً به معنی این است که کسی بتواند اینکار را انجام دهد.

ملاحظه میکنید در ایده اصلی فقط صحبت از اندیشه و فکر است و در ایده فرعی تصریح میکند که علیم بودن دقیقا به همین معنی است که کسی این کار را (یعنی محدود کردن اندیشه و تفکر فکر نکردنی) بکند ، و حال آنکه واضح است که تفکر غیر از دانش است ، انسانها به وسیله تفکر به دانش و علم به حقائق نائل میشوند ، و علیم تفکر ندارد سابقه جهل ندارد ، و علاوه در نوشتار قبلی تفاوت علم شهودی را با علم شناختی و منطقی توضیح دادم.

> فرض کنیم X موجودی فرضی و علیم است، ، و فرض کنیم Y مجموعه کلیه واقعیتهایی (همان عباراتی که ویتنشتاین استفاده کرده) که جهان را تشکیل داده است، میباشد. برای اینکه X علیم باشد باید Y را در تمامیت آن بداند.

در نوشتار قبلی ثابت شد که چنین مجموعهای وجود ندارد و آنچه واقعیت دارد عضوهای بینهایت است که ممکن نیست نظریه مجموعهها آنها را صید کند و در یک مجموعه مرجع قرار دهد ، و خدای علیم بینهایت واقعیات را به علم شهودی میداند.

> این قضیه را میتوان همچنین اینگونه بیان کرد. برای اینکه X وجود داشته باشد باید Y دانسته شود. اما یکی از چیزهایی که موجود X باید بداند این است که او یک موجود علیم است، و مشکل از اینجا آغاز میشود. X برای اینکه بداند علیم است باید بداند که هیچ واقعیتی ای دانستهای غیر از آنچه او میداند وجود ندارد. بنابر این او باید چیزی را علاوه بر Y بداند. او باید عبارت وجودی سلبی (4) (Negative existential statement) "هیچ واقعیت نادانستهای برای من وجود ندارد" را بداند. حال بیایید دانستن این عبارت را Z بنامیم، حال سوال این است، آیا دانستن Z ممکن است؟

اول در نوشتار سابق رسوب زدایی از مفهوم وجود کردم پس این جمله : (باید بداند که هیچ واقعیتی ای دانستهای غیر از آنچه او میداند وجود ندارد) اگر به معنای وجود وصفی است ناقص است و اگر به معنای وجود اشاری است مقابل ندارد تا بگوییم وجود ندارد یعنی واقعیات گاهی حقیقتی است ثابت و گاهی حقیقتی است موجود و گاهی حقیقتی است معدوم ، و دار حقائق مکشوف علیم است ولو معدوم باشد به عدم وصفی ولی موجود است به وجود اشاری ، که توضیح آن در پست دوم و چهارم گذشت.

ثانیا علیم آن است که بینهایت واقعیت را شهود میکند و بیان شد که این بینهایت در یک مجموعه نمیتواند قرار بگیرد پس اساسا فرض وجود داشتن واقعیتی دیگر که مجهول باشد معنی ندارد ، چون این بینهایت همه را در خود جای داده است ، مثلا شما مجموعه بینهایت اعداد طبیعی را به کسی معرفی کنید و سپس از او سؤال کنید (عبارت وجودی سلبی) : از کجا میدانی که عددی طبیعی که در شمارش به کار میرود غیر از آنچه تو در این مجموعه قرار دادی نیست؟! آیا از این سؤال شما نمیخندد؟؟ میگویید چون در موضوع شمارش من بینهایت عدد را آوردم فرض وجود غیر آن معنی ندارد.

> حال ما حقیقت را راجع به برخی از عبارات وجودی سلبی میدانیم. مثلاً من میدانم که در این اتاق اکنون هیچ فیلی وجود ندارد. اما ما میدانیم که یک عبارت وجودی سلبی محدود به موقعیتهایی دارد که واقعیتهای آنها محدود است (5). اما Z کاملاً عبارتی از جنس دیگر است. Z ادعایی را مطرح میکند که کاملاً غیر قابل مشخص کردن از لحاظ زمانی و فضایی است. بنابر این دانستن Z مانند دانستن این است که بدانیم هیچ القَنْطُورِی (6) در هیچ زمانی در هیچ کجا وجود نداشته است.

نزدخداباوران واضح است که خدا محیط بر تمام مکانها و تمام زمانها است و بلکه به معنای خاص بینهایت است که به معنای فرابعدی و رهایی است که برای توضیح آن به نوشتار قبلی مراجعه کنید.

و جواب از بقیه فقرات به همین مطالب واضح میشود

فصل سوم: شرح و بسط مطالب فصل دوم

مقدمه: بحرانهای ریاضی؛ معضلات ریاضی

[1]یکی از بحران هایی که در فضای ریاضیات در قرن بیستم پیش آمد، پیدا شدن نظریه مجموعهها[2] و به تبع آن بحران هایی بود که در این نظریه پیدا شد[3]

۱. معضلات ریاضی

(بحران غیر از «مسائل حل نشده» و مسائل مشکل است؛ یعنی چیزی که اساس علم را به هم میریخت؛ یکی همان قضیه فیثاغورث است که خطا قطر مثلث با ضلع مباین است و به یک عدد گنگ میرسیم. مهمترین مفهوم حساب تناسب بود و با یک زحمتی با این بحران مواجه شدند.)

[شیخ بهایی در کتاب خلاصه الحسابشان یک خاتمه ای دارند خیلی جالب:

> قد وقع للحكماء الراسخين في هذا الفن مسائل صرفوا في حلّها افكارهم و وجّهوا الي استخراجها انظارهم و توصّلوا الي كشف نقابها بكل حيلة و توسّلوا الي رفع حجابها بكل وسيلة فما استطاعوا اليها سبيلا و لا وجدوا عليها مرشدا و دليلا فهي باقية علي عدم الإنحلال من قديم الزمان و مستصعبة علي سائر الاذهان الي هذا الآن، و قد ذكر علماء هذا الفنّ بعضها في مصنّفاتهم و أوردوا شطرا ًمنها في مؤلّفاتهم تحقيقا ًلإشتمال هذا الفن علي المستصعبات الآيات و إقحاما ًلمن يدّعي عدم العجز في الحسابيات و تحذيرا ًللمحاسبين من التزام الجواب عمّا يورد عليهم منها و حثا ًلأصحاب الطباع الوقادة علي حلّها و الكشف عنها، و أنا أورد في هذه الرّسالة سبعة منها علي سبيل الأنموزج اقتداء ًبمنارهم و اقتفاء ًلآثارهم، و هي هذه:
>
> الأولى: عشرة مقسومة بقسمين إذا زيد علي كلّ جذره و ضرب المجتمع في المجتمع حصل عدد مفروض.

> الثانية: مجزوإن زدنا عليه عشرة كان المجتمع جذرا و نقصناها منه كان للباقي جذراً.
>
> الثالثة:أقرّلزيد بعشرة الا جذر ما لعمرو و لعمرو بخمسة الاّجذر ما لزيد.
>
> الرابعة:عدد مكعّب قسم بقسمين مكعّبين.
>
> الخامسة:عشرة مقسومة بقسمين اذا قسمنا كل منهما علي الآخر و جمعنا لخارجين كان المجتمع مساويا لاحد قسمي العشرة.
>
> السّادسة: ثلاث مربّعات متناسبة مجموعها مربّع.
>
> السّابعة: مجذور اذا زيد عليه جذره و درهمان أو نقص منه جذره و درهمان كان المجتمع او الباقي جذر هذا.»

...ابتدای خاتمه می‌فرمایند: فرق معضل با بحران چیست؟ ...می گوید:«**خاتمه قد وقع للحكماء الراسخين في هذا الفن مسائل**»زیر کلمه مسائل خط بکشید. امروز می‌گویند:«problems» خود عرب ها می گویند مسئلة و مسائل. مرحوم شیخ همه مسائل تعبیری کردند، لذا می گویند که:«ا**ن اورد في هذه الرسالة سبعة منها**».

لغت problems که در دارنگلیسی به کار می برند صرفا به معنای مسئله نیست که ما در فارسی می گوییم.مسئله در فارسی گاهی یک بار مشکلی در آن هست. معضلی که می‌رداماد به کار بردند، خیلی قشنگ است[4].پیشنهاد من این است که problems را که این ها ترجمه می کنند بگویند: معضلات نه مسائل. بله ما مسئله را در فارسی به معنای چیز مشکل هم به کار می بریم.می گوییم این جا برای ما یک مسئله شده است.حتی به معنای بحران و معضل به کار می بریم.اما خود کلمه فی حد نفسه در ابتدا در بدوش شامل آن معنای مشکل نیست.تعجب است که عرب ها همه همین طور می‌گویند: مسائل، مسائل هیلبرت مثلاً، مسائل اسمیل،مسائل الالفیه.[5]

«**قد وقع للحكماء الراسخين مسائل**»حکمای راسخین در ریاضیات معضلاتی برایشان پیش آمده«**صرفوا في حلّها افكارهم و وجّهوا الي استخراجها انظارهم و توصّلوا الي كشف نقابها بكل حيلة و توسّلوا الي رفع حجابها بكل وسيلة فما استطاعوا اليها سبيلا**»خودشان را کشته اند.تعبیر خودکشی را حاج آقای حسن زاده زیاد به کار می بردند.خودکشی می کردند در این ها ولی نتوانستند حل کنند:«**و لا وجدوا عليها مرشدا و دليلا و هي باقية علي عدم الإنحلال من قديم الزمان** »از قدیم این ها مانده حل نشده است«**و مستصعبة علي سائر الاذهان الي هذا الآن**»تا این جا که من این را برایتان می نوشتم مستصعب است نتوانستند حل کنند.«**و قد ذكر علماء هذا الفنّ بعضها في مصنّفاتهم و أوردوا شطراً منها في مؤلّفاتهم تحقيقاً لإشتمال هذا الفن علي المستصعبات الآيات و إقحاماً لمن يدّعي عدم العجز في الحسابيات**»خیلی قشنگ است.بعضی می گویند در حساب که دیگر عجز معنا ندارد برو جلو.می گویند نه این ها را آوردند که چرا عجز نیست در حسابیات؟ همه عجز است، درنگ است، در جازدن است، معضل است. پیش می آید « **و تحيّراً**

للمحاسبين من التزام الجواب...»می گویند زود خیالتان نرسد به جواب رسیده اید.خودکشی کردندو جوابش را نیافتند.شما یک وقت غره نشوید لذا بعد می‌گویند:من هفت تا از آن معضلات را در این جا می آورم به عنوان خاتمه کتاب خودم.

پس در یک کلمه، شیخ بهایی هفت تا مسائل ریاضی را مطرح کردند.مسئله یعنی چه؟مسئله، نه یعنی مسئله. مسئله یعنیproblem، یعنی مشکل و معضلی آوردند که این ها حل نشده است. جالب است! ایشان هفت تا انتخاب کردند در زمان ما هم در سال 2000 برای هفت معضل ریاضی جایزه تعیین کردند.**Millennium Prize Problems**

... هفت تاست که یکیش حل شده است. کسی که حل کرد جایزه را نگرفت این طور در نظرم هست [6].

.. شیخ فرمودند. ببینید خلاصه الحساب ما یک نمایندهٔ است برای این که ختم کرده است خلاصه الحساب را با شکستن غرور ریاضی.ریاضیات خیلی عالی است، اما غرور آور نباید باشد.باید عملاً ببینید که معضلاتی داریم که خودکشی کردند و حل نشده است.حالا ببینید تا چه زمانی حل بشود یا نشود.

در ابتدای قرن بیستم هم هیلبرت 22 تا مسئله ریاضی مطرح کرد[7] :Hilbert's problems.طی قرن بیستم این ها مطرح بود.این اواخر هم اسمیل سیزده چاردهٔ معضل مطرح کرد که آن ها هم چندتایش حل شده است[8].منظور این است که این ها را می گوییم معضلات.

۲. بحران های ریاضی

اما بحران چیست؟crisis .عرب ها می گویند ازمهٔ. «ازمهٔ الریاضیات». «الازمات الثلاثة». «الازمات فی الریاضیات». معضل یک امر مشکلی است، اما دم و دستگاه را به هم نمی ریزد.مثالی که می توانم خدمتتان عرض کنم مثل یک کشتی است.می آیند می گویند الان معضلی شده است فلان شیر فلان مخزن باز نمی شود.کارمان گیر است.شیر باز نمی شود.این را می گوییم معضلی است برای کشتی، ولی بحران نیست.

بحران وقتی است که توفانی می شود که الان کشتی با همه چیزش می رود زیر آب.این می شود بحران. این خیلی تفاوت دارد با معضلات و مسائلی که باید حل شود.زمان مرحوم شیخ معضلاتی بوده که به یک نحوهایی حل شده بود.بحران هایی هم بوده که حل شده بود.زمان ایشان بحران خیلی نمودداری نبوده که بفرمایند.

در این کتاب تاریخ ریاضیات که مال هاوارد است-دو جلد است و به فارسی هم ترجمه شده است[9]- ایشان می گوید بحران های ریاضی در طول تاریخ ریاضیات سه تا بوده است.

یکی بحران کشف اعداد گنگ[10]،

دومی بحران کشف حساب جامعه و فاضله مشتق و انتگرال[11]،

سومی هم بحران نظریه مجموعه ها در قرن بیستم[12]،

من در ذهنم هست که شاید منظورش، بحران در ریاضیات مطلق بوده است و الا کشف هندسه های نااقلیدسی در این اواخر هم خودش یک بحران بود. اصلاً شرایطی رسیده بود که بعضی از هندسه دان ها ریاضی دان می گفتند ای کاش ما وارد نشده بودیم[13].یعنی این قدر تحت فشار مطالب عصبی بودند. کل هندسه به هم می ریخت و ریخت.فلذا آلآن هندسه های اقلیدسی و نااقلیدسی کنار همند .خیلی مهم است که سلطان مقتدری را که بر تخت امپراتوری کل هندسه نشسته- هندسه اقلیدسی -بخواهند از تخت پایین بکشند و بشوند در ردیف یکی دیگر از آن هندسه ها.خیلی کار می برد. خودش بحران است، ولی ایشان در کتاب تاریخ ریاضیات هندسه های نااقلیدسی را توضیح داده است، اما به عنوان بحران از آن نام نبرده است[14][15].]

این ها از یک بحران علمی در ریاضیات خواستند سوء استفاده کنند.اصل مطلب آن هایک مطلب ریاضی است که هیچ ربطی به خدا ندارد و جالب این است که خود کانتور که اول بار به این پارادوکس توجه پیدا کرد موحّد بود[16] و راسل که پارادوکس بعدی را که قوی تر است یافت، شکّاک بود؛ اما شخصی به نام گریم[17] مدعی شده که این برهانی بر عدم خداست و ظاهرا نزد آتئیستهای مثبتگرا[18] این از مهمترین برهان ها قلمداد میشود که خواهیم دید کاملا مبتنی بر یک خلط مبحث است.

خلاصه استدلال آن ها این است که ما بینهایت عدد داریم؛ و هر عددی با عدد دیگر یک رابطه دارد؛ پس بینهایت رابطه میشود که هر رابطه‌ای، یک حقیقت است متمایز از حقیقت دیگر. وقتی با حقایق متمایز روبرو شدیم، پس میتوانیم مجموعه‌ای از حقایق داشته باشیم؛ آنگاه سراغ نظریه مجموعه‌ها میرویم و این حقایق را در بزرگ ترین مجموعه، که مجموعه همه حقایق است قرار میدهیم. و میدانیم مجموعه‌ی همه حقایق، ناممتناهی است. تا اینجا بحث، ریاضی بود. بعد میگویند در ریاضیات اثبات شده که چنین مجموعه‌ای (مجموعه همه حقایق) پارادوکسیکال است؛ پس نمیتواند وجود داشته باشد؛ پس کسی هم که بخواهد علم به آن داشته باشد وجود ندارد.

قضیه کانتور

اما چرا مجموعه‌ی همه حقایق، پارادوکسیکال است؟ کانتور که موسس نظریه مجموعه‌ها بود خودش متوجه مشکلی شد و آن در خصوص «مجموعه همه مجموعه‌ها» بود. هر مجموعه‌ای رابطه‌ای با زیرمجموعه‌هایش دارد که تعداد زیر مجموعه‌ها بزرگتر از تعداد اعضای اصلی خود مجموعه است. مثلا مجموعه {زید ، عمرو} را در نظر بگیرید. این مجموعه چند زیرمجموعه دارد: {زید}، {عمرو}،{} (= مجموعه تهی)، {زید، عمرو}. یعنی واضح است که عدد اصلی هر مجموعه (در اینجا: 2) کمتر از تعداد زیر مجموعه‌هایش (در اینجا: 4) است.

حال «مجموعه همه مجموعه‌ها» را در نظر بگیرید. این مجموعه، اگرچه بینهایت است اما در همان بینهایتهایش یک عدد اصلی دارد و طبق استدلال فوق، تعداد زیر مجموعه‌هایش بیشتر از این عدد میشود. پس مجموعه‌ای که شامل این زیر مجموعه‌ها شود، مجموعه همه مجموعه‌هاست، نه آن که ما ابتدا فرض گرفته بودیم. دوباره نقل کلام به این مجموعه میکنیم و این راه هیچگاه متوقف نمیشود؛ پس مجموعه همه مجموعه‌ها نمیتواند وجود داشته باشد[19].

پارادوکس راسل

بعدها راسل پاراداکس دیگری یافت که از این قوی تر است[20]. میدانیم که مجموعه‌ها دو قسمند: مجموعه‌هایی که عضو خودشان نیستند (مثل مجموعه صندلیهای این اتاق) و مجموعه‌هایی که عضو خودشان هستند (مثل مجموعه مفاهیم کلی).

وی دسته اول را مجموعه‌های طبیعی نامید. حال بحث در مجموعه‌ی مجموعه‌های طبیعی است که آیا عضو خودش هست یا نیست؟ اگر عضو خودش باشد، پس عضو خودش نیست و اگر عضو خودش نباشد پس عضو خودش است و این پاراداکس است.

---

[1] مطالب اصلی این فصل، تقریری مباحثی است که با عنوان شرح مقاله با خدایی گام به گام در ضمن جلسات اصول سال ۱۳۹۲-۱۳۹۳ (در روزهای چهارشنبه)و در تاریخ ۱۰/ ۲/ ۱۳۹۳ و ۱۷/ ۲/ ۱۳۹۳ و ۳۱/ ۲/ ۱۳۹۳ صورت گرفته است. علاوه‌بر متن اصلی، از بخشی از افادات موجود در جلسات حکمت و عرفان شیعی بهره بردهایم که با کروشه متمایز شده است.

[2] نظریه مجموعه‌ها به انگلیسی: (Set theory) شاخه‌ای از منطق ریاضی است که به مطالعه مجموعه‌ها می‌پردازد. مجموعه‌ها، گردایه‌ای از اشیاء هستند. هر چند هر نوعی از اشیاء می‌توانند یک مجموعه را تشکیل دهند، اما نظریه مجموعه‌ها اغلب در مورد اشیاء مرتبط با ریاضی به کار می‌رود. زبان نظریه مجموعه‌ها را می‌توان در تعریف تقریباً همه اشیاء ریاضی به کار برد. مطالعه جدی بر روی نظریه مجموعه‌ها توسط گئورگ کانتور و ریچارد دِدکیند در دهه ۷۰ قرن ۱۸ میلادی شروع شد. بعد از کشف تناقض‌های نظریه طبیعی مجموعه‌ها، دستگاه‌های اصل موضوعی بیشماری در اوایل قرن ۲۰ مطرح شدند که معروفترین آنها اصل موضوعه زرملو-فرانکل و اصل موضوعه انتخاب هستند.

[3] در زمینه بحرانهای ریاضیات مراجعه کنید به : چند جلسه اجمالی در مورد تاریخ ریاضیات، بحرانها و مسائل

[4] ایشان کتابی با نام الاعضالات دارند و در آن به بررسی معضلات علوم مختلف از جمله ریاضیات، کلام و فقه پرداخته‌اند که از این میان شش معضل اول مربوط به ریاضیات است. کتاب اینگونه آغاز می‌شود: بسم اللّه الرحمن الرحيم و الاعتصام بالعزيز العليم بعد الحمد للّه و الصلاة على عباده المصطفين. فيا ولدي الروحانيّ و يا حبيبي العقلانيّ، يا شرف آل خاتون، و يا من هو بقريحته الشاهقة الملكوتيّة لكلّ علم غامض قانون. رقاك اللّه إلى قصيا المعارج في النشأتين، و لقّاك نضرة العيش على قصوى المدارج في العالمين. أقرّ اللّه أعيننا بمشاهدة جمالك، و سقانا كأسا دهاقا من رحيق وصالك.

لا تلهينّ سرّك اللطيف عن التدبّر في هذه الإعضالات العويصة التي كسائر نظائرها من العويصات الداهية السآجية و المعضلات السآحية السآطية في فنون العلوم و أفانين الصنّاعات، كان فلّ وفدتها و حلّ عقدتها أمرا مرهونا في الأعصار و الدهور بزمنان و شيئا مضمونا للأفهام و العقول من قبلنا. و اللّه سبحانه قد يسّرنا للفصية عنها و القول الفصل فيها بجميل منّه و إكرامه و جزيل فضله و إنعامه. ذلك فضل اللّه يؤتيه من يشاء، و اللّه ذو الفضل العظيم.

الإعضال الأوّل (زاوية حدبة الدائرة و الخط المماسّ إيّاها)

قد برهن أقليدس في خامس عشر ثالثة «الأصول» على أنّ زاوية حدبة الدائرة و الخطّ المماسّ إياها أصغر من كلّ حادّة مستقيمة الخطين.(مصنفات ميرزا دامادی، النص، ص: 267)

[5] با توجه به کاربردهای مختلف کلمه problem به نظر می‌رسد که لااقل از دو عبارت برای ترجمه این کلمه در زبان فارسی ای سایر زبان‌ها بهره برد: مسئله و معضل. در مورد مسائل جهان واقعی(real-world problems) تعبیر مسئله، مناسب است درحالی‌که در مسائل انتزاعی‌تر مانند مسائل هیلبرت و اسمیل باید از واژه معضل استفاده کرد.

[6] گریگوری ایکوولویچ پرلمان (روسی: ???????? ????????? ?????????؛ IPA: [?r????or??j ?jakəvl??v??t? p??r??l??man] زاده ۱۳ ژوئن ۱۹۶۶) ریاضیدان اهل روسیه است که به دلیل مشارکت در تجزیه و تحلیل هندسه ریمانی و توپولوژی هندسی شناخته شده‌است. او به‌طور گسترده به عنوان یکی از بزرگترین ریاضیدانان زنده شناخته می‌شود.

وی به دلیل اثبات حدس پوانکاره، مسئله‌ای که یک قرن ذهن بسیاری از ریاضیدانان را به خود مشغول کرده بود، در سال ۲۰۰۶ برنده مدال فیلدز شد که عالی‌ترین جایزه در زمینهٔ ریاضیات است. این نابغه بزرگترین افتخار دنیای ریاضی جهان را کسب کرد اما از پذیرش این جایزه سر باز زد و گفت «من به پول یا شهرت علاقه‌ای ندارم؛ نمی‌خواهم مثل یک حیوان در باغ وحش به نمایش گذاشته شوم.» در ۲۲ دسامبر ۲۰۰۶، مجله علمی ساینس اثبات حدس پوانکاره را به عنوان تحول علمی سال به رسمیت شناخت. این نخستین باری بود که چنین تحولی در زمینه ریاضی رخ می‌داد

جان بال، رئیس مرکز جهانی ریاضیدانان، گفت که وی شخصاً از پرلمان خواسته بود تا این جایزه را ببرد، اما پرلمان به او گفته که از آنجایی که خودش را جزو جامعه ریاضیدانان جهانی نمی‌داند و احساس تکافتادگی می‌کند این جایزه را نمی‌پذیرد.

آقای پرلمان به خبرنگار یکی از روزنامه‌های بریتانیا دربارهٔ علت نپذیرفتن جایزه مؤسسه کلی گفت: «من همه آنچه را که می‌خواهم، در اختیار دارم.»

او برنده جایزه نقدی به ارزش یک میلیون دلار هم شده بود، که این جایزه بخاطر تئوری آقای پرلمان در مورد فضای چند بعدی به او تعلق یافت؛ اما او این جایزه را هم نپذیرفت.

آقای پرلمان برنده المپیاد ریاضی تمام روسی بوده و همچنین مشارکت‌های تحول‌سازی در هندسه ریمانی و توپولوژی هندسی داشته‌است.

در سال ۲۰۱۰ اعلام شد که ایشان به دلیل اثبات حدس پوانکاره حایز معیارهای لازم برای دریافت نخستین جایزه هزاره کلی است. در ۱ ژوئیه ۲۰۱۰ آقای پرلمان این جایزه را در کرد و تصمیم هیئت داوران و جایزه را بسیار غیرمنصفانه دانست و گفت مشارکتش در حل فرض پوانکاره از ریچراد همیلتون بیشتر نبوده‌است. ایشان همچنین جایزه معتبر جامعه ریاضی اروپا را در کرد.(سایت ویکی پدیا)

[7] در سال ۱۹۰۰ میلادی دیوید هیلبرت (۱۸۶۲- ۱۹۴۳م) در دومین کنگره بین المللی ریاضی دانان در پاریس در یک سخنرانی از مسائل ریاضیات سخن گفت و پس از آن هرمن ویل (Herman Weyl) درباره آن مسائل چنین گفت: «هرکس این مسائل را حل کند به کلاس افتخاری ریاضیدانان وارد می شود.» در همین سال هیلبرت به یک ریاضیدان برجسته در آلمان تبدیل شد. او به خاطر حل

مسائل اساسی در نظریه ی پایایی و گزارش مهم در نظریه اعداد که در سال ۱۸۹۶ به چاپ رسید مشهور شد. در سال ۱۸۹۹ به درخواست کلاین (Klein) او کتاب مبانی هندسه را برای تجلیل از مقام گائوس (Gauss) و وبر (Weber) در گوتینگن به چاپ رساند. هورویتز (Hurwitz) در نامه ای به هیلبرت درباره ی این کتاب نوشت: «شما با نوشتن این کتاب کوچک زمینه ی شگرفی از تحقیقات را باز کردی که می تواند آن را ریاضیات اصل موضوعه نامید که بسیار فراتر از قلمرو هندسه است. او طی این سخنرانی ۲۳ مسئله در رابطه با ریاضیات را عنوان نمود که عناوین آن به شرح زیر هستند:

۱- ????? ?????? ???? ??? ???????? ???????

۲- ??????? ???? ?????? ? ????

۳- ????? ??? ?? ??? ???? ?? ????? ????? ? ?????? ?????

۴- ????? ?? ?????? ?? ????????? ????? ??? ?? ????

۵- ????? ?? (Lie) ?? ???? ??? ?????? ?? ??????? ???? ??? ???? ????? ????? ????? ????? ? ???? ??

۶- ????? ?????? ??? ?????? ??????? ???? ?????

۷- ??? ? ?????? ???? ?????? ????

۸- ????? ????? ???? ????? ????? ??? ? ????? ? ?????

۹- ????? ??? ???? ??? ????? ?? ?? ?????

۱۰- ??? ?? ???????? ???? ????? ?? ????? ??????? ???????? ???? ????.

۱۱- ????? ? ?? ????? ???? ??? ??? ???? ??? ?? ????? ???? ????

۱۲- ????? ???? ? ?????? ???? ????? ??? ???? ?? ?? ?????? ???? ????

۱۳- ?????? ???? ?? ??????? ??? ???? ? ???? ?????? ???? ?? ?? ?????

۱۴- ????? ?????? ???? ????????? ???? ? ???? ?? ?????

۱۵- ????? ? ????? ???? ?? ???? ????? ????? (Schubert)

۱۶- ????? ???????? ????? ?? ? ???? ??? ???? ? ????? ????? ???? ????? ???? ??? ??? ????????? ??? ???? ?? ?? ????

۱۷- ????? ??? ??? ???? ???? ???? ?????

۱۸- ????? ?????? ??????? ?? ????? ?????? ??????? ??? ????

۱۹- ??? ???? ??? ????? ???? ?? ???? ??????? ?????? ?????? ????

۲۰- ????? ? ?? ????? ? ??? ???? ????? ??? ????

۲۱- ????? ???? ??????? ????????? ??? ?? ???? ????????? ?? ??? ????? ???

۲۲- ??????? ???? ????? ?????? ???? ????? ?????????

۲۳- ????? ? ????? ??? ??? ???? ???????.

(سایت آی هوش)

[8] مسائل اسمیل (به انگلیسی: Smale's problems) فهرستی از هجده مسئله حل نشده ریاضی در سال ۱۹۹۸ است که توسط استیو اسمیل در همین سال انتشار یافت و در ۱۹۹۹ بازنشر شد. اسمیل این فهرست را در پاسخ به درخواست ولادیمیر آرنولد که در آن زمان معاون مدیر کل اتحادیه جهانی ریاضیات بود، تدوین کرد. آرنولد از گروهی از ریاضیدانان خواسته بود تا فهرستی از مسائل ریاضی برای قرن بیست و یکم پیشنهاد دهند. الهام بخش او در طرح این خواسته، فهرست مسائل هیلبرت بود که در اوائل قرن بیستم توسط ریاضیدان نامی، هیلبرت، پیشنهاد شده بود.

از میان این مسائل، تا کنون بعضی به صورت جزئی پاسخ داده شده اند. علاوه بر این، تا سال ۲۰۱۶ نیز سه مسئله به صورت کامل حل شده است. این سه مسئله شامل حدس پوانکاره (مسئله شماره ۲ در فهرست اسمیل) حل شده توسط گریگوری پرلمان در سال ۲۰۰۳، مرکز سازهای دفیموفیسم‌ها (مسئله شماره ۱۲) حل شده توسط امی ویلکینسون در سال ۲۰۰۹ و سیستم لورنز (مسئله شماره ۱۴) حل شده توسط واروی توکر در سال ۲۰۰۲ است.(سایتویکی پدیا)

[9] ترجمه دکتر محمدقاسم وحیدی اصل

[10] مراجعه کنید به جلسات فقه هوش مصنوعی، جلسه ۸، مبحث فیزیکی و ذهنی نبودن عدد پی و جلسه دوم و سوم تاریخ اجمالی ریاضیات: مسائل و بحران‌ها

[11] جلسه پنجم آشنایی اجمالی با تاریخ ریاضیات: مسائل و بحران ها

[12] از مطالعه تاریخ ریاضیات از عهد یونان باستان تا زمان حاضر آشکار می‌شود که مبانی ریاضیات، سه بحران تکان دهنده را پشت سر گذاشته است که در آن‌ها، در هر مورد، بخش وسیع از ریاضیات که تا آن زمان استوار به نظر می رسیده در معرض تردید قرار گرفته و به تجدید نظر فوری نیاز پیدا کرده است.

نخستین بحران در مبانی ریاضیات در قرن پنجم ق. م پیش آمد و در واقع چنین بحرانی نمی توانست پیشتر از آن رخ دهد زیرا ، همچنانکه دیده ایم ، ریاضیات به عنوان يك علم قیاسی زودتر از قرن ششم ق.م. شاید به توسط تالس فیثاغورس و شاگردان آن‌ها شروع نشده بود. این بحران با کشف ان منتظر این مطلب که همه کمیت‌های هندسی همجنس با یکدیگر متوافق نیستند به جلو انداخته شد؛ مثلا نشان داده شد که قطر و ضلع يك مربع هیچ مقیاس مشترکی ندارند. چون بسط فیثاغورسی کمیت‌ها بر این اعتقاد راسخ شوندی که همه کمیت‌های همجنس متوافق اند بنا شده بود؛ این کشف که کمیت‌های همجنس، ناموافق هم می توانند باشند بسیاری مخرب از کار در آمد به عنوان مثال كل نظريه فيثاغورسي تناسب با همه تبعات آن می بایست به دلیل سست بنیادی به کناری گذاشته می شد. رفع این نخستین بحران در میان ریاضیات نه به سادگی و

ن به سرعت می‌سر بود. این مقصود سرانجام در حدود سال ۳۷۵ ق.م. توسط ائودوكسوس زيرك حاصل شد که نظریه تجدید نظر یافته او در باره كميتها و تناسب یکی از بزرگترین شاهکارهای همه اعصار است. بررسی قابل توجه ائودوکسوس از نامتوافقها را می‌توان در مقاله پنجم اصول اقلیدس یافت؛ مطالعه وی اساساً با شرح جدیدی که توسط ریشارد در کیندر در سال ۱۸۷۲ از اعداد گویا داده شد، انطباق دارد. ما این نخستین بحران در مبانی ریاضیات را در بخش ۳-۵ و چگونگی رفع آن را توسط ائودوکسوس در بخش ۵-۵ دیده ایم این امکان کامل موجود است که بحران مزبور عمدتاً برآثر فرمول‌بندی و پذیرش روش اصل موضوعی در ریاضیات پیدا شده باشد.

دومین بحران در مبانی ریاضیات پس از کشف حسابان توسط نیوتن و الی‌بنیتز در اواخر قرن هفدهم پیش آمد. دیدیم که چگونه جانشینان این دو تن سرمست از قدرت و کار پذیری این ابزار جدید از استحکام به قدر کفایت پایه ای که این موضوع بر آن بنا شده بود غافل ماندند، به طوری که به جای داشتن براهینی که نتایج را موجه نماید نتایج را برای توجیه براهینی به کار گرفتند. با گذشت زمان تناقضها و پارادوکسهای روز افزون پیش آمد و بحرانی جدی در مبانی ریاضیات آشکار گردید. این نکته بیشتر و بیشتر تشخیص داده شد که بنای آنالیز خانه ای به روی شن است و سرانجام در اوایل قرن نوزدهم کوشی اولین گامها را در جهت حل این بحران با گذاشتن روش دقیق حدود به جای روش مبهم بی‌نهایت کوچکها، برداشت با به اصطلاح حسابیدن آنالیز که توسط واریشتراس و پیروانش در قدم بعد انجام شد. این احساس به وجود آمد که بر دومین بحران در مبانی آنالیز غلبه حاصل شده است. کل ساختار ریاضیات از مشکل رها و بر پایه ای عاری از اشکال قراردادهٔ شده است. ریشه و نحوه رفع این دومین بحران در مبانی ریاضیات موضوع بخش ۹-۱۴ بود. پیش اخطارهای این بحران را می‌توان در پارادوکسهای مشهور زنون به حدود ۴۵۰ ق.م. مشاهده کرد.

سومین بحران در مبانی ریاضیات به طور غیر مترقبه ای در سال ۱۸۹۷ متجسم شد، و گر چه اکنون قدمتی بیش از نصف قرن دارد هنوز به نحوی که رضایت همه افراد ذیعلاقه را فراهم آورد، حل نشده است. این بحران با کشف پارادوکسها ای تعارضاتی در حاشیه نظریه عام مجموعه ها منسوب به کانتور پدیدار شد. چون مفاهیم مجموعه تداخل زیادی در قسمت اعظم ریاضیات دارد و به همین دلیل می‌توان در واقع آن را پایه ای برای ریاضیات قرار داد کشف پارادوکسهایی در نظریه مجموعه ها طبیعتاً در اعتبار تمامیت ساختار بنیادی ریاضیات سایه تردید می افکند.

در سال ۱۸۹۷ ریاضیدان ایتالیائی بورانی - فورتی، اولین پارادوکس در نظریه مجموعه ها را به معرض توجه عموم در آورد این پارادوکس به صورتی که در ذهن بودلی فورتی بوده و توسط او بیان شده متضمن اصطلاحات فنی وابسته هایی است که در این بررسی محدود، جای بسط آن وجود ندارد. معهذا، جوهر این پارادوکس را می توان با یک توصیف غیرفنی از پارادوکس کامل مشابهی که دو سال بعد توسط کانتور پیدا شد، ارائه کرد. کانتور در نظریه مجموعه های خود موقوف به اثبات این مطلب شد که به ازای هر عدد ترانسفینی معروض همواره یک عدد ترانسفینی بزرگتر از آن وجود دارد. عینا همانطور که بزرگترین عدد طبیعی موجود نیست، بزرگترین عدد ترانسفینی هم وجود ندارد. حال مجموعه ای را در نظر بگیرید که اعضای آن کلیه مجموعه های ممکن باشند. مطمئناً هیچ مجموعه ای نمی تواند اعضای بیش از این مجموعه کلیه مجموعه ها داشته باشد. ولی اگر چنین باشد چگونه یک عدد متعالی بزرگتر از عدد ترانسفینی این مجموعه می تواند وجود داشته باشد؟

در حالی که پارادوکسهای بورالی - فورتسی و کانتور متضمن نتایجی از نظریه مجموعه هاست برتراند راسل در سال ۱۹۵۲ پارا ودکسی کشف کرد که به چیزی جز مفهوم صرف خود مجموعه بستگی ندارد. قبل از بیان پارادوکس راسل ، متذکر می شویم که مجموعه‌ها ای اعضای خود هستند ای اعضای خود نیستند. مثلاً مجموعه همه ایده های مجرد خود ایده مجردی است، ولی مجموعه همه انسانها یک انسان نیست . همچنین ، مجموعه همه مجموعه ها خود یک مجموعه است ولی مجموعه کلیه ستارگان یک ستاره نیست. مجموعه کلیه مجموعه هایی را که اعضای خودشان هستند با M، ومجموع کلیه مجموعه هایی را که اعضای خودشان نیستند با N نشان میدهیم حال از خود می پرسیم که آیا

مجموعه عضو خودش هست ای نیست . اگر N یکی از اعضای خودش باشد، در این صورت N عضو Mاست و من عضو N و N يك عضو خودش نیست. از طرف دیگر اگر N یکی از اعضای خود نباشد آنگاه یکی از اعضای N و من M است ، و N یکی از اعضای خودش می باشد. پارادوکس از این حقیقت ناشی میشود که در هر حالت به يك تناقض می رسیم.

صورت فشرده تر و دور از اطنابی از پارادوکس راسل را می توان به شکل زیر ارائه کرد. فرض کنید X مجموعه دلخواهی باشد. در این صورت بنابر تعریف N،

(???) <<->> (?¢X)

حال X را N بگیرید و به تناقض زیر برسید

(???)<<->> (N¢N).

راسل این پارادوکس را طی نامه ای برای فرگه فرستاد این نامه درست بعد از آنکه فرگه آخرین جلد اثر عظیم دو جلدی خود درباره مبانی حساب را تکمیل کرده بود، به او رسید. فرگه در پاسان کتاب خود با جملات متاثر کننده و کاملا تواضعانه خویشتن داری زیر به این نامه اشاره کرد: برای یک دانشمند هیچ چیزی نامطبوعتر از آن نیست که به محض اتمام کاری مبنای آن را در حال فروپاشی ببیند نامه ای از آقای برتراند راسل در زمانی که کتاب تقریباً آماده سپردن به چاپخانه بود مرا در چنین وضعی قرارداده است. حاصل زحمات ده سال ای بیشتر همین بود.

به پارادوکس راسل به شکلهای مختلف جنبه عامیانه داده شده است. یکی از مشهورترین شکلهای آن توسط خود راسل در سال ۱۹۱۹ داده شد و به گرفتاری آرایشگری در يك دهکده معین مربوط میشود که میبایست کار خود را بر این گذارده که فقط و فقط صورت آن عده از اهالی دهکده را بتراشد که خود صورت خود را نمی تراشند. ماهیت پاردار کسی وضعیت این شخص وقتی تشخیص داده میشود که بخواهیم به سوال زیر پاسخ دهیم، « آیا این آرایشگر صورت خود را خود میتراشد یا نه؟ اگر وی صورت خود را بتراشد، در این صورت مطابق اصل اعلام شده از طرف خود نباید این کار را انجام دهد. اگر وی صورتش را خود نتراشد در این صورت مطابق اصل خود باید این کار را انجام دهد.

از زمان کشف تناقضهای بالا در بطن نظریه کانتوری مجموعه ها، پارادوکسهای فراوان دیگری به وجود آمده اند. این پارادوکسهای جدید نظریه مجموعه ها به چندین پارادوکس قدیمی در منطق مربوط میشوند. مثلاً نکته زیر به ائوبولیدس مربوط به قرن چهارم ق.م. نسبت داده می شود، چیزی که الان میگوییم اندرست است. اگر گفته اون بولیدس درست باشد آنگاه بنابر گفته خود او این گفته باید اندرست باشد. از طرف دیگر ، اگر گفته ائوبولیدس اندرست باشد در این صورت نتیجه میشود که گفته او باید درست باشد. بدین ترتیب گفته اون بولیدس نمی تواند بی آنکه موجب تناقضی شود نه درست و نه نادرست باشد. پارادوکسی منسوب به اپیمنیدس که در صحت انتساب آن به اپیمنیدس جای تردید است شاید قدیمیتر از پارادوکس اون بولیدس باشد. اپیمنیدس که خود فیلسوفی از اهالی کرت ۲ در قرن ششم ق.م بود گوای چنین گفته است که اهالی کرت همیشه دروغ می گویند. از تحلیل ساده این گفته آشکار میشود که این نیز ناقض خود است.

وجود پارادوکسهایی در نظریه مجموعه ها نظیر پارادوکسهای بالا، به وضوح آشکار می کنند که کار از جایی عیب دارد از زمان کشف آنها نوشته های زیادی درباره این موضوع منتشر، و کوششهای متعددی در جهت رفع آنها پیشنهاد شده است. (آشنایی با تاریخ ریاضیات، ج ۲، ص ۳۱۵-۳۱۸)

[13] اصل پنجم اقليدس كه ايجاز ساير اصول را نداشت، به هيچوجه واجد صفت بديهي نبود. در واقع اين اصل بيشتر به يك قضيه شباهت داشت تا به يك اصل. بنابراين طبيعي بود كه لزوم واقعي آن به عنوان يك اصل مورد سئوال قرار گيرد. زيرا چنين تصور مي شد كه شايد بتوان آن را به عنوان يك قضيه من اصل از ساير اصول استخراج كرد، اي حداقل به جاي آن مي توان معادل قابل قبول تري قرار داد. در طول تاريخ رياضيدانان بسياري از جمله، خواجه نصيرالدين طوسي، جان واليس، لژاندر، فوركوش بوياوئي و ... تلاش كردند اصل پنجم اقليدس را با استفاده از ساير اصول نتيجه بگيرند و آن را به عنوان يك قضيه اثبات كنند. اما تمام تلاشها بي نتيجه بود و در اثبات دچار خطا مي شدند و به نوعي همين اصل را در اثبات خود به كار مي بردند. دلامبر اين وضع را افتضاح ناميد. ياونوش بوياوئي يكي از رياضيدانان جواني بود كه در اين راه تلاش مي كرد. پدر وي نيز رياضيداني بود كه سالها در اين اين مسير تلاش كرده بود . و طي نامه اي به پسرش نوشت: تو ديگر نبايد براي گام نهادن در راه توازي ها تلاش كني، من پيچ و خم اين راه را از اول تا آخر مي شناسم. اين شب بي پاياني همه روشنايي و شادماني زندگي مرا به كام نابودي فرو برده است، **التماس مي كنم دانش موازيها را رها كني**. ولي ياونوش جوان از اخطار پدر نهراسيد، زيرا كه انديشه ي كاملاً تازه اي را در سر مي پروراند. او فرض كرد نقيض اصل توازي اقليدس، حكم بي معني اي نيست. وي در سال 1823 پدرش را محرمانه در جريان كشف خود قرار داد و در سال 1831 اكتشافات خود را به صورت ضميمه در كتاب تنتامن پدرش منتشر كرد و نسخه اي از آن را براي گائوس فرستاد. بعد معلوم شد كه گائوس خود مستقلاً آن را كشف كرده است. بعدها مشخص شد كه لباچفسكي در سال 1829 كشفيات خود را در باره هندسه نااقليدسي در بولتن كازان، دو سال قبل از بوئي منتشر كرده است. و بدين ترتيب كشف هندسه هاي نااقليدسي به نام بوياوئي و لباچفسكي ثبت گرديد.(ساعت راسخون، مقاله هندسه نااقليدسي) همچنين

مراجعه كنيد به صفحه janos Bolyai

[14] دو رويداد رياضي مهم و انقلابي در نيمه اول قرن نوزدهم به وقوع پيوست. اولين آنها كشف هندسه خود سازگاري ، غير از هندسه مرسوم ،اقليدس در حدود سال ۱۸۲۹ بود؛ دومي كشف جبري متفاوت با جبر معمولي دستگاه اعداد حقيقي در سال ۱۸۴۳ بود. اكنون توجه خود را به بررسي اين دو رويداد معطوف كرده ابتدا آن را كه در زمينه هندسه است مورد بحث قرار ميدهيم.

شواهدي در دست است كه بسط منطقي نظريه موازيها ويانيان قديم را به طور قابل ملاحظه اي دچار در دسر كرده بود اقليدس با تعريف خطوط موازي به عنوان خطوطي واقع در يك صفحه كه هر اندازه آنها را در هر جهت امتداد دهيم يكديگر را تلاقي نمي كنند و با پذيرفتن اصل توازي خود به عنوان يك اصل موضوع كه امروزه مشهور است ، به اين مشكلات پاسخ داد. اين اصل (براي ديدن بيان آن نگاه كنيد به بخش ۵ - ۷) كه ايجاز ساير اصول را ندارد به هيچوجه واجد صفت بديهي نيست. در واقع اين اصل، عكس قضيه ۱۷ است و بيشتر به يك قضيه شباهت دارد تا يك اصل بعلاوه اقليدس از اين اصل نواز تا وقتي كه به قضيه ۲۹ مي رسد، استفاده نمي‌كند. طبيعي بود كه لزوم واقعي اين اصل مورد سؤال قرار گيرد و چنين تصور شود كه شايد بتوان آن را به عنوان قضيه اي از نه «اصل متعارفي» و «اصل موضوع» ديگر استخراج كرد اي حداقل بتوان به جاي آن معادل قابل قبولتري را قرار داد. ...

تلاشها در جهت استخراج اصل توازي به عنوان قضيه اي از نه اصل متعارفي و اصل موضوع ديگر هندسه دانان را براي متجاوز از دو هزار سال مشغول كرد و منجر به برخي از دوررستريني پيشرفتهاي رياضيات نوين شد. براهين متعددي براي اين اصل ارائه شد اما طولي نكشيد كه نشان داده شد كه هر يك از آنها مبتنيبر يك فرض تلويحي معادل با خود اصل بودهاند...

بوبوئي كشفيات خود را در سال ۱۸۳۲ در ضميمه اي بركارهاي رياضي پدرش به چاپ رساندي. بعداً معلوم شد كه لباچفسكي كشفيات مشابهي را زودتر در سالهاي ۱۸۲۹-۱۸۳۰ منتشر كرده است.

ولی به دلیل موانع زبانی و کندی در گسترش اکتشافات جدید موجود در طی آن سالها کار لباچفسکی چند سالی در اروپای غربی ناشناخته ماند. به نظر می رسد نیازی به بحث درباره نظریه های بغرنج و احتمالاً بی اساس داری بر اینکه چگونه هر يك از این سه تن اطلاعاتی از کشفیات یکی دیگر به دست آورده و به خود منتسب کرده است، نباشد. در آن زمان هم سوءظن و هم متهم کردن دیگران تا حد زیادی وجود داشته است.

ای ون (ای ووهان) بوييوئی يك افسر مجارستانی در ارتش اطریش و فرزند فورکوش ای وولفگانگ بوييوئی، يك معلم رياضی والیتی و دوست دیرینه گاوس بود. بدون شك محرك بوویوئی جوان در مطالعه اصل توازی، پدرش بود که پیشتر از آن علاقه مندی خود را به این مسئله نشان داده بود پیش از سال ۱۸۲۳ ای ون بوویوئی شروع به درک ماهیت واقعی مسئله ای که با آن مواجه بود کرد و در نامه ای که طی این سال به پدر نوشت، شیفتگی خود را به کار خود نشان میدهد. در این نامه وی عزم خود را برای چاپ رساله ای در باب نظریه موازی به محض آنکه زمان و فرصت تنظیم مطالب را پیدا کند اعلام کرده و ادا در می دهد که «من از هیچ جانی تازه و شگفت انگیز آفریده ام» پدر اصرار می کند که مقاله مورد نظر به عنوان ضمیمه ای برای نیمه فلسفی حجیم دو جلدی خود او درباره ریاضیات مقدماتی چاپ شود. بسط و تنظیم اندیشه ها کندتر از آنچه ای ون انتظار داشت پیش رفت، ولی سر انجام در سال ۱۸۲۹، وی دستنویس پایانی یافته را به پدر تسلیم کرد و سه سال بعد، در ۱۸۳۲ ، رساله به صورت يك ضمیمه بیست و شش صفحه ای در انتهای جلد اول اثر پدرش ظاهر می شود...

در سال ۱۸۵۴، ریمان نشان داد که اگر امتناهی بودن خط مستقیم کنار گذاشته شود و صرفاً بی کرانگی آن مورد پذیرش واقع شود آنگاه با چند جرح و تعدیل جزئی اصول موضوعه دیگر هندسه سازگار ان اقلیدسی دیگر را می توان از فرض زاویه حاده به دست آورد. کلاین در سال ۱۸۷۱ به این سه هندسه یعنی هندسه بوویوئی و لبا چفسکی، هندسه اقلیدس، و هندسه ریمان نامهای هندسه هذلولوی هندسه سهموی و هندسه بیضوی داد.

البته نتیجه مستقیم کشف این اولین هندسه نا اقلیدسی به سرانجام رسیدن مسئله دیرینهٔ اصل موضوع توازی بود - نشان داده شد که اصل موضوع توازی مستقل از اصول موضوعه دیگر هندسه اقلیدسی است. اما پیامدی دور رستر از این آزاد شدن هندسه از قالب سنتی آن بود. این عقیده ریشه دار قرنهای متمادی که تنها يك هندسه ممکن می تواند موجود باشد خدشه دار شد و راه برای ایجاد چندین دستگاه مختلف هندسه گشوده شد. با امکان خلق چنین هندسه های کاملاً مصنوعی آشکار شد که هندسه لزوماً به فضای مادی واقعی گره نخورده است. اصول موضوعه هندسه برای ریاضیدان صرفاً فرض هایی شدند که درستی یا نادرستی فیزیکی آن ها برای او مطرح نیست. ریاضیدان می تواند اصول موضوعه خود را برای ارضای خاطر خود اختیار کند به شرطی که سازگاری آن ها با یکدیگر محفوظ بماند.(آشنایی با تاریخ ریاضیات، ج ۲، ص ۱۸۴-۱۹۰)

[15] جلسه اول آشنایی با تاریخ ریاضیات: معضلات و بحران ها

[16] گئورگ کانتور یک لوتری مومن بود که اعتقادات صریح مسیحیان فلسفه علم او را شکل داد.گفته میشود کانتور بر این باور بوده که نظریه اعداد ترامتناهی از سوی خدا بوی الهام شده بوده‌است.(سایت ویکی پدیا) کانتور در سال 1905 پس از پشت سر گذاشتن دوران بیمارایش در بیمارستان و بازگشتش به خانه، یک اثر مذهبی نوشت.(سایت آی هوش)

[17] پاتریک گریم،فیلسوف آمریکایی دارای نوشته هایی در زمینه فلسفه دین،فلسفه علم،فلسفه منطق(سایت ویکی پدیا)

[18] در ابتدای مقاله با خدایی گام به گام می‌خوانیم: افراطي ترين بي خدايان ، بي خدايان مثبت گرا هستند كه مدعي هستند دليل دارند بر نبود خدا و قانع نمي شوند كه بگويند ما نمي دانيم خدا هست يا خير؟ بلكه مي گويند حتما مي دانيم كه خدا نيست ، و ادعاي علم و قطع كه امر ساده اي نيست دارند ، و توجه كنيد به تفاوت اين سه: علم به وجود ، علم به عدم ، عدم علم به وجود يا عدم.

[19] در نظریه مجموعه‌های مقدماتی، قضیه کانتور نتیجه بنیادینی است که بیان می دارد: برای هر مجموعه A ، مجموعه تمام زیر مجموعه های A (به آن مجموعه توانی A گفته می شود و با P (A) } نمایش داده می شود) به طور اکید کاردینالی بزرگتر از خود A دارد. برای مجموعه های متناهی می توان با شمردن تعداد زیر مجموعه ها، درستی قضیه کانتور را مشاهده کرد. با در نظر گرفتن تهی به عنوان یک زیر مجموعه، کل زیرمجموعه های یک مجموعه n عضوی برابر خواهد بود، بنابر این اگر

$card(A) = n$ ،

آنگاه

$card(P(A)) = 2^n$

و قضیه برقرار است چون برای تمام اعداد صحیح نامنفی داریم $2^n > n$

کشف مهم کانتور این بود که گزاره اخیر برای هر مجموعه ای درست است، یعنی علاوه بر مجموعه های متناهی برای مجموعه های نامتناهی، چه شمارا ای ناشمارا نیز درست است. به طور خاص، یکی از پیامدهای مهم قضیه کانتور این است که اعداد طبیعی که یک مجموعه شمارا با کاردینال

$card(N) = \aleph_0$

است، برابر یک مجموعه ناشمارا می باشد که کاردینال آن با اعداد حقیقی برابر بوده و این کاردینال از کاردینال اعداد طبیعی بزرگتر است و به آن کاردینال پیوستار گویند:

$card(R) = card(P(N))$.

رابطه بین این کاردینال ها را به این صورت نمایش می دهند:

$c = 2^{\aleph_0} > \aleph_0$

این قضیه به افتخار ریاضیدان آلمانی گئورگ کانتور نامگذاری کردند، او اولین کسی بود که این قضیه را در انتهای قرن نوزدهم میلادی بیان و اثبات کرد. قضیه کانتور پیامدهای فوری و مهمی در فلسفه ریاضیات داشت. به عنوان مثال، با تکرار عمل ساخت مجموعه توانی از یک مجموعه نامتناهی و اعمال قضیه کانتور، به سلسله مراتب نامتناهی از کاردینال‌های نامتناهی می رسیم که هر کدام از قبلی به طور اکید بزرگتر است. در نهایت، این قضیه دلالت بر این دارد که هیچ کاردینالی که از همه کاردینال‌ها بزرگتر باشد وجود ندارد (به زبان دیگر "بزرگترین بی نهایت وجود ندارد").(ساعت ویکی پدیا) همچنین ملاحظه کنید: Cantor's theorem

[20] اینکه راسل چه موقع این پارادوکس را کشف کرد دقیقاً مشخص نیست، ولی به‌نظر می‌رسد که در ماه مه یا ژوئن سال ۱۹۰۱ و احتمالاً به عنوان نتیجه‌ای از کارش بروی قضیه کانتور (عدد

اصلی هر مجموعه از عدد اصلی مجموعه توانی آن کمتر است) به این پارادوکس پی بردهاست.

او ابتدا پارادکس را در سال ۱۹۰۱ به صورت مقالهای در ماهنامهٔ اینترنشنال با عنوان «جدیدترین کار در فلسفه ریاضیات» مطرح کرد.

او همچنین برهان کانتور را در مورد اینکه بزرگترین عدد اصلی وجود ندارد مطرح ساخت و اضافه کرد که «استاد» در مورد یک مغالطه زیرکانه مقصر است که او بعداً در این باره توضیح میدهد.

راسل همچنین پارادوکس را در کتاب خود با عنوان اصول ریاضیات (Principles of Mathematics)-که نبایدی با کتاب قبلی او Principia Mathematica اشتباه شود- ذکر کرد که آن را «تناقض» نامید. دوباره او بیان کرد که این پارادکس را با تجزیه و تحلیل برهان کانتور برای اثبات عدم وجود بزرگترین عدد اصلی بهدست آوردهاست.

راسل در سال ۱۹۰۲ این پارادکس را با فرگه که در حال نوشتن جلد دوم کتاب خود با عنوان Grundgesetze der Arithmetik بود در میان گذاشت.

فرگه با عجله در ضمیمهای، یک راه حل برای رفع این پارادکس نوشت که بعدها ناکافی بودن آن به اثبات رسید. به هر حال، بعد از چاپ جلد دوم کتاب، فرگه بعد از انتشار دومین بخش کتاب خود، کمی در مورد منطق ریاضی و فلسفه ریاضیات نوشت.

ارنست تسرملو در هنگام کار روی نظریه اصل موضوعی مجموعهها که در سال ۱۹۰۸ آن را منتشر ساخت، به این پارادکس پیبرد ولی گمان کرد نکتهٔ کوچکی است و اذا هیچگاه آن را منتشر نساخت. تسرملو در دستگاه اصل موضوعی خود، از این پارادکس با بهرهگیری از اصل موضوعی با عنوان اصل موضوع تصریح جلوگیری کرد.

راسل و آلفرد نورث وایتهد سه جلد از کتاب اصول ریاضیات را به امید پیروزی در حالی که فرگه شکست خوردهبود نوشتند و در آن سعی کردند با استفاده از نظریهٔ انواع، از چنین پارادکسهایی در نظریه طبیعی مجموعهها اجتناب کنند.

هنگامی که آنها موفق به پایهریزی حساب شدند، به نظر نمیرسید که فقط از منطق استفاده کرده باشند. به هر حال کورت گودل، در بین سالهای ۱۹۳۰ تا ۱۹۳۱ ثابت کرد که منطق بسیاری از بخشهای Principia Mathematica که اکنون به عنوان منطق مقدماتی خوانده میشود کامل است ولی حساب پئانو در صورتی که سازگار باشد لزوماً ناکامل است؛ بنابراین از این به بعد برنامههای منطقی فرگه و Principia Mathematica مردند.(سایت ویکی پدیا)

پارادوکس های نظریه مجموعه ها؛ استفاده ابزاری آتئیست ها

خدای حفره ها

کسانی که خدا را قبول ندارند زیاد میگویند خدای متدیّنین، خدای حفرههاست[1]؛ در حالی که این غلط محض است و اساس تعلیمات انبیای عظام بر واضحات است نه بر مجهولات؛ یعنی بر اساس آنچه میدانی خدا را بشناس. **«ان الله هو الرزاق ذوالقوه المتین[2]»**. آیا ما در خانه نمیفهمیم پدرمان زحمت کشیده و نان آورده و میگوییم خدا رزاق است؟!! این تهمت محض است. به هر حال خودشان که این تهمت را به خداپرستان میزنند، آمدهاند از این حفره علمی که در قرن بیستم پیش آمده دلیلی بر رد خدا بیاورند! یعنی چون نظریه مجموعهها با مشکل مواجه شده، پس خدا نیست! خود مؤسس این نظریه مسیحی بوده اما مسیحیای که در خداپرستیاش محکم بوده است [3]. بعد شما از مشکلی که او در نظریهاش با آن مواجه شده میخواهید بگویید خدا نیست؟!

> این استدلال یک جوابهای دم دستی دارد که کارآیی آن هابیشتر در مقام مجادله است ، مثل اینکه گفته شود خدا علیم است یعنی بینهایت موجودات را میداند و دلیل شما ثابت کرد که مجموعه تمام حقائق موجود نیست پس چه تناقضی پیش میآید؟! شما که با این دلیل ثابت نکردی موجودات موجود نیستند فقط ثابت کردی بزرگترین مجموعه موجود نیست و لذا ما کلمه تمام را بر میداریم و میگوییم داوند بینهایت موجودات را میداند ، مثل اینکه میگویی بزرگترین عدد طبیعی موجود نیست ولی بینهایت عدد طبیعی حقیقت دارد.

اشکال آتئیست ها: فتح باب معارف الهی

اما آن چه عرض من است این است که این سوء استفاده از این حفره و خلأ علمی، میتواند یک فتح باب عظیمی در مباحث کلاسیک بشود برای معارف الهی؛ لذا عرض کردم که اگر جواب خوبی بخواهد جلو رود یکی از مبادی آن این است که برای ما واضح شود که وعاء نفسالامر، اوسع از وجود

است.وقتی شما این سوء استفاده‌ها را می‌بینید، می‌بینید که آن بحث به بهترین وجهی خود را نشان می‌دهد در حل این شبهات.

پس ولو خود این شبهه پوچ و استفاده از یک حفره است، اما برای حل کردن آن مطلب و واضح شدن آن، این خیلی مهم است. وگرنه اگر در همین مقاله دیده باشید ابتدایش یک جواب‌های جدلی که کامل ذهن را قانع می‌کند داده‌ام؛ اما اگر بخواهد یک پاسخ حلی‌ای که مطلب را کامل برای مخاطب بیطرف واضح کند ارائه شود، آن بحث ها لازم است. یعنی ذهن کامل قانع شود که آن عدد اول بعدی را حتماً خدا می‌داند. حال این عدد موجود است یا معدوم؟ آیا اعداد بی‌نهایت، معروض موجود دارد؟ یا اصلاً نیاز ندارد به این، بلکه این ها حقایق نفس‌الامری است که موطنش موطن علم است و همه در فهم آن اتفاق دارند. این جواب حلی آن ها می‌شود. یعنی جواب حلّی‌ای که انسان را کامل قانع و راضی می‌کند در گروی فهم این است که بفهمیم نفس‌الامر اوسع از وجود است[4].

خلاصه اینکه شبهه بسیار مبتذل است، اما فضایی را فراهم می‌کند برای آشنا شدن با حقایق نامتناهی. بیینید نویسنده در همین جملات فوق توجه داده که مثلا عدد 2 انواع روابط با اعداد دیگر دارد و همه این رابطه‌ها نفس‌الامریت دارد. یعنی لایتناهی رابطه ریاضی وجود دارد که این ها فرض ذهن ما نیست، بلکه این ها را کشف و درک می‌کنیم. این گام خوبی است برای بحث های ما. قبلا اشاره شد که کتابی که شیخ عباس عارفی نوشته است[5]، گام خیلی خوبی برداشته که نشان داده نفس‌الامر فضایی سالبه فراتر از عالم وجود است[6]. این گام اولیه خوبی است، اما قبلاً اشاره کردیم که این اوسعیت نفس‌الامر فقط وادی هیچستان نیست، بلکه عرصه‌های دیگری هم هست که نه وجود است و نه هیچستان، اما واقعیت دارد مانند موطن اتصاف ماهیت به امکان، موطن صدق معانی حرفیه و نسب[7] و ...

پس اشکال این ها این زمینه را مهیا می‌کند که بفهمیم بستر نفس‌الامر، زمینه‌ای دارد که مسبوق به مبدأ مطلقی است که حتی سابق است بر اصل تناقض؛ یعنی هرچیزی که بخواهید بگویید راست است، بستر راست بودن مسبوق بر این است. مبدأ مطلقی که ما می‌گوییم همین که بخواهیم انکارش کنیم اثباتش می‌کنیم. لذا چیزی که خیلی مهم است این است که **«یصیب الفکر منه بانه موجود و وجود الایمان لا وجود صفة»[8]**.[9] یعنی اساساً وقتی درباره خدا می‌گوییم «هست» به معنای واقعیت داشتن است، نه به معنای ممثّل شدن و ظهور لدی المشاعر[10]. یعنی می‌شود یک جور «وجود» را بگوییم که به آن معنا خدا موجود نیست: **«لم تکن ممثّلا فتکون موجودا[11]»**. یعنی اگر وجود ظهور در مشاعر باشد خدا، نیست؛ اما به معنای اصل واقعیت داشتن، خدا موجود است.

---

[1] خدای رخنه‌پوش، خدای حفره‌ها ای خدای شکاف‌ها)به انگلیسی: (God of the gaps که از آن به صورت پرستش شکاف‌ها)به انگلیسی: Worshiping the gaps) نیز یاد شده‌است، به مجموعه‌ای از چند دیدگاه درباره خدا گفته می‌شود؛ که به‌طور کلی در صدد اثبات است. عبارت خدای حفره‌ها دلالت به این ایده دارد که خدا برای پر کردن خلأ علمی بشر ساخته شده‌است.

واژه خدای حفره‌ها نخستین بار در قرن نوزدهم میلادی، توسط مبلغی مسیحی به نام هنری دورمند در مجموعه سخنرانی‌هایش (که به صورت کتابی به نام ظهور انسان منتشر گردید) بکار گرفته

شد. او به سرزنش آن دسته از مسیحایی که همواره اشاره به آنچه که علم هنوز پاسخی در خور برایش نیافته بود -حفره‌هایی که با خدا پر می‌شدند- داشتند، پرداخت و آن‌ها را دعوت به پذیرش این واقعیت نمود که همه طبیعت را متعلق به خدا و نتیجه آفرینش او در نظر گیرند.

[2] الذاریات:58

[3] گئورگ فردیناند لودویگ فیلیپ کانتور در 3 مارس 1845 در سن پترزبورگ متولد شد. مادرش ، یک کاتولیک رومی ، از خانواده ای از نوازندگان برجسته بود. پدرش، پسر یک تاجر هوده، نیز یک تاجر موفق بود، اما یک لوتری معتقد بود که در یک مأموریت لوتری در سن پترزبورگ بزرگ شده بود. باید اضافه کرد که پدر کانتور اعتقادات عمیق مذهبی خود را به پسرش منتقل کرد.

...نامه ها (و شهادت همکارانی که او را می شناختند) نشان می دهد که کانتور معتقد بود که توسط خدا انتخاب شده است تا حقایق نظریه مجموعه ها را به مخاطبان بیشتری برساند.

او حتی در مقطعی در مورد موضوع نامتناهی به پاپ لئو سیزدهم نامه نوشت.

... برخی اسناد نشان می دهد که علاوه بر اعمال فواصل دوره ای تفکر و کناره گیری از امور روزمره، دوره های افسردگی کانتور کامل بی ثمر نبوده است، و در واقع او اغلب می توانست ایده های ریاضی خود را در خلوت بیمارستان یا بی سر و صدا در خانه دنبال کند. در واقع، این بیماری ممکن است از اعتقاد او مبنی بر اینکه اعداد متناهی از جانب خدا به او منتقل شده است، حمایت کرده باشد. در واقع، همانطور که او در شعار سوم آخرین انتشار خود، Beitrage در سال 1895 اشاره کرد: زمانی فرا خواهد رسید که این چیزهایی که اکنون از شما پنهان مانده اند، به نور آورده شوند.

این یک متن آشنا از کتاب مقدس است، و منعکس کننده اعتقاد کانتور به این است که او یک واسطه بود که به عنوان وسیله مکاشفه عمل می کرد. همچنین ممکن است منعکس کننده ایمان کانتور باشد که علیرغم هر گونه مقاومت غالب در برابر کارش، روزی از شناخت و ستایش ریاضیدانان در همه جا برخوردار خواهد شد

...پس از یک دوره طولانی بستری شدن در بیمارستان در سال 1908 ، کانتور به یکی از دوستانش در گوتینگن ، ریاضیدان انگلیسی گریس چیشولم اینگ نامه نوشت. همانطور که او توصیف کرد، افسردگی شیدایی او کیفیت خلاقانه ای به خود گرفت:

سرنوشت عجیبی که خدا را شکر به هیچ وجه مرا نشکسته است، اما در واقع مرا از نظر درونی قوی تر، شادتر و شادتر از چند سال گذشته ساخته است، مرا از خانه دور نگه داشته است - همچنین می توانم بگویم که از دنیا دور هستم... در انزوای طولانی من، من ریاضیات و نه به ویژه نظریه اعداد فرامتناهی در من خوابیده ای آیش نکرده اند. اولین نشریه در سال های اخیر که باید در این زمینه انجام دهم برای "مجموعه مقالات انجمن ریاضی لندن" تعیین شده است.

در جای دیگر، کانتور در واقع اعتقاد خود را در مورد حقیقت نظریه خود به صراحت با اصطلاحات شبه مذهبی توصیف کرد: نظریه من مانند یک سنگ محکم ایستاده است. هر تیری که به سمت آن هدایت شود، به سرعت به کماندار خود باز می گردد. از کجا این را بدانم؟ زیرا من سال ها آن را از همه طرف مطالعه کرده ام. زیرا سال ها آن را از همه طرف بررسی کرده ام. زیرا من تمام اعتراضاتی را که تا به حال علیه اعداد بی نهایت مطرح شده است، بررسی کرده ام، و مهمتر از همه به این دلیل که ریشه های آن را تا به اصطلاح اولین علت معصوم همه مخلوقات دنبال کرده‌ام.

نسل های بعدی ممکن است این فلسفه را در کنند، با تردید به ارجاعات فراوان او به سنت توماس ای پدران کلیسا نگاه کنند، اعلامیه های متافیزیکی را نادیده بگیرند و ریشه های عمیق مذهبی ایمان بعدی کانتور را به حقیقت مطلق نظریه اش به طور کامل از دست بدهند. اما همه این تعهدات به عزم کانتور برای رها نکردن اعداد متناهی کمک کرد. به نظر می رسد مخالفت عزم او را تقویت کرده است. بردباری او، به اندازه هر چیز دیگری که ممکن بود کمک کند، تضمین کرد که نظریه مجموعه ها در سال های اولیه شک و نکوهش جان سالم به در می برد تا در نهایت به عنوان یکی نیروی نیرومند و انقلابی در ریاضیات قرن بیستم شکوفا شود(مقاله گئورگ کانتور و نبرد او برای نظریّه مجموعه‌های بی‌نهایت)

[4] در این زمینه به مقاله گردآوری«نفس الامر» مراجعه فرمایید.

[5] مطابقت صور ذهنی با خارج: پژوهشی درباره رئالیسم معرفت شناختی و ارزش شناخت؛ عباس عارفی. پژوهشگاه فرهنگ و اندیشه اسلامی. سال 1388

[6] ایشان پس از بیان مطالبی در تبیین محکی و مصداق چنین می نویسد:«محکیّ ِصورت ذهنی فیل همان مصداق ِال بشرط از وجود و عدم است و مصداق مفهوم فیل،همان واقع موجود فیل است که در جنگل ای در باغ وحش و... زندگی می کند.

مفهوم«عدم» نیز به دلیل این که صورت ذهنی است، خاصّ و شأن ِحکایی دارد،پس محکی هم خواهد داشت.محکیّ ِمفهوم عدم،همان چیزی است که این مفهوم از آن حکایت می کند.در واقع محکیّ ِمفهوم عدم،همان واقع و مصداق ِال‌بشرط از وجود و عدم یعنی ال‌بشرط از تحقق متناسب با خودش است.فهم محکی عدم چندان دشوار نیست،ولی تشخیص حیثیت مصداقی عدم، مقتضی ِتشحیذ ذهن و کشاندن تحلیلات آن،درعوالم عدمیه و **ایالات متحده هیچستان** است-تعبیری «ایالات» درباره مصادیق اعدام، مستند بدین وجه است که عدم ای مطلق است ای مضاف و عدم مضاف نیز به تبع ِتعدد ِمضاف الیه، تعدد می پذیرد-مصداق عدم چیست؟پاسخ این است که مصداق عدم همان واقع متحقق عدم در عالم ِال تحقق است.

اما این چگونه تواند بود که مفهومی که مصداق آن،حیثیتی جز حیثیت عدم تحقق ندارد،آن مصداق در عالمی که «عالم ِال تحقق» نام دارد،تحقق داشته باشد؟!«ام سمعنا بهذا فی آبائنا الاولین»! جواب این است که هر چیزی تحقق متناسب با خود دارد.«تحقق کل شیئ بحسبه» و «عدم» نیز در عالم مصداق خود تحقق دارد،ولی تحقق متناسب و مساوق با خودش.

نکته ای که تشخیص آن تیزی ذهن را می طلبد این است که عدم نیز تحقق دارد،زیرا عدم علاوه بر «محکی»،«مصداق» هم دارد،ولی تحقق عدم به معنای تحقق وجودی نیست.تحقق مصداق وجود به معنای تحقق وجودی است و تحقق مصداق عدم به معنای تحقق عدمی است.(مطابقت صور ذهنی با خارج،ص۱۶۸-۱۶۹)

[7] آن عرصه‌های که تاکنون استقرا کرده‌ایم و اغلب آنها قبلا به تفصیل (در تفسیر سوره ق) بحث شده است فقط اشاره می‌شود، یعنی عرصه‌هایی که برای روشن شدن اوسعیت وجود از واقعیت می‌توان مطرح کرد

۱.امر به طبیعت تعلق می‌گیرد یا به فرد.

۲. وضع و استعمال در لفظ و معنی که هر دو مربوط به طبیعی لفظ و طبیعی معنا است.

۳.تمام استلزامات (مطابَقشان).

4. اعداد کل به خصوص اعداد اول.

۵. هرجا فرمول قابل استدلال ریاضی یا هندسی باشد.

۶.حسن وقبح افعال قبل از عمل.

۷.اتصاف ماهیت به امکان قبل از وجود.این دو از مرحوم صدر

8.استحاله تناقض به عنوان امر نشدنی، نه نیافتنی [مطابَق آن، صرف «نیافتن» نیست بلکه «ضرورت ِنیافتن» است]. «تناقض محال است» صادق است، پس این [گزاره] مطابَقی دارد، مطابَقش چیست؟ این مطابَق هر چه باشد، موجود است یا معدوم؟ اگر موجود است، ممکن الوجود است یا واجب الوجود؟

۹.رابطه دو وجود، یعنی وقتی دو موجود جوهری، نسبت مقولی با همدیگر دارند و قاعده اتحاد طرفین نسبت در آن ها جاری نمی‌شود.

10.نسب و معانی حرفی مطلقا

11.حرکت و سیلان (صیرورت)، یعنی تشابک وجود و عدم به تعبیر صاحب اسفار.

12.موطن معقولات ثانی فلسفی، یعنی تحیث یک وجود واحد به حیثیات متعدده.

13.تمام سیستم‌های صوری که رابطه بین عناصر پایه و اصول موضوعه را با قضایای مترتبه اثبات می‌کنیم. (رابطه در نگاه وسیع)

14.وعاء فرض اجتماع نقیضین، که به معنای وجود هر دو نیست، چون یکی از آن دو عدم است.(مقاله اعتباریات،جلسه دوم)همچنین: حوزه‌های مختلف نفس الامر

[8] عن أبي‌عبدالله الحسين عليه السلام: يصيب الفكر منه الإيمان به موجودا و وجود الإيمان لا وجود صفة، به توصف الصفات لا بها يوصف، و به تعرف المعارف لا بها يعرف، فذلك الله لا سمي له، سبحانه ليس كمثله شيء و هو السميع البصير(تحف العقول،ص ۲۴۵؛بحار الانوار،ج ۴،ص ۳۰۱)

[9] در این زمینه به مقاله «وجود خداوند؛ وجود اشیای نه وجود وصفی» مراجعه فرمایید.

[10] مقصود از مشاعر، حوزه تاثیر و تاثر ابدان هر فرد است. غوینی هم نوعا مشاعر را به معنای حواس گرفتند و المَشاعِرُ: الحواس.(الصحاح، ج2، ص: 699) وهو ذَكِيّ المشاعر و هي الحواس(أساس البلاغة ؛ ص331)المَشاعِر- [شعر]: حواس. فرهنگ ابجدی ؛ متن ؛ ص823)

[11] أنت الذي لا تحد فتكون محدودا، و لم تمثل فتكون موجودا، و لم تلد فتكون مولودا(الصحيفة السجادية، ص: 21)

تبیین اوسعیت نفس الامر از وجود

[این که تناقض ممکن است در مطالب نفس الأمری، خیلی چیزهای جالبی است، فقط باید آدم اُنس بگیرد. اتفاقاً بسط این مسائل قبلش در ذهنم بود. در یک جایی که مطالب آتئیسم بود- به زبان فارسی هم بود، بعداً هم برداشتند - یک استدلالاتی آورده بودند[1] ، مثلاً یکی از استدلالاتشان این بود که از راه تناقض در مجموعه های کانتور و بعدش راسل، پارادوکس مجموعه ها پیش آمده بود: مجموعه همه مجموعه ها چون تحقق ندارد پس خدا هم وجود ندارد! یک استدلالی دارند که مطرح هست، هر کسی به این، جواب های جور واجور می دهد، آن فضا بود که من دیدم که عجب! اینهایی که من قبلاً در عالَم طلبگی فکرش را داشتم چقدر اینجا به درد می خورد لذا به تفصیل متناسب با آنجا ولو هنوز بقیه اش مانده توضیحاتی عرض کردم. اساساً این پارادوکس ها و این مبانی اگر جلو برود به هیچ چیزی صدمه نمی زند، به مسائل مبدأ شناسی و مبدئیت مطلقه خدای متعال ربط پیدا نمی کند.

ارتباط بین حقایق نفس الامریه

ما حقایق نفس الأمریه را قبل از اُنس به آن ها تک تک می بینیم، به عبارت دیگر شما می گویید: اگر نظام اَعداد طبیعی هم نبود، تناقض محال بود ولو ما اصلاً عدد طبیعی هم نداشتیم. این مانعی ندارد، فوری هم می گوییم: چه ربطی دارد؟ امّا بعد از اینکه مأنوس می شویم می بینیم که اگر به خودش نگاه بکنیم می گوییم: چه ربطی به هم دارد؟ امّا در دید وسیع، اینها به هم مربوط است، تمام سیستم های صوری و حتی قضیه اَعداد طبیعی در آن نظام به استحاله تناقض هم مربوط است و استحاله تناقض هم به آنها مربوط است، اگر اُولَی الالوّلیاّت می گوییم در وضوح درکش است، نه در ارتباط حقانیت بودن و نفس الامریت دار بودنش. این عرض من است.

خداوند؛ فرارابطه

از اینجا فرمایشی را امام علیه السلام در توحید صدوق دارند در بحث و مناظره مفصّلی که با عمران صابی دارند، خیلی جالب است، حضرت می فرمایند: تنها و تنها خدای متعال هست که فرد است و با چیز دیگر نظام تشکیل نمی‌دهد و بند ـبه چیز دیگری نیست، «**یُمسِک بعضُهُ بعضا**[2]»، از خدا در بروید- این تعابیری همه مسامحه ای است که برای نزدیک شدن به مقصود است- ممکن نیست یک حقی را پیدا بکنید که در حقانیت ـخودش محتاج به غیر خودش نباشد، بند است، نظام تشکیل داده است، شبکه هست، مثل جدول ـضرب است که هر cell به cell دیگر مربوط است، جدول ضرب سه بعدی باشد پیچیده تر و جدول ضرب n بعدی باشد پیچیده تر است[3].

حقایق نفس الامریه؛ مسبوق به خداوند

زبان‌های صوری منطق

زبان های صوری را در منطق دیدید[4]، این زبان های صوری را وقتی کسی واردمی شود می بیند که ابتدا استاد شروع بکند یک ساعت در این فضا صحبت بکند، اصلاً مستقیماً ذهن خود این

متعلّم، آشنا شوندهی با یک زبان، نمی رود سراغ فرا زبان[5]. می گوید: اینها را ریختیم و تمام شد و یک دستگاه برای خودش به پا شد. امّا بعد از اینکه اُنس گرفت و دستگاه را خوب براندازکرد، می گوید: ممکن نیست این دستگاه به پا بشود مگر به یک فرازبان.

فرازبان؛ سابق بر زبان‌های صوری

یعنی ما تا یک فرازبان نداشته باشیم، زبان نداریم، سیستم صوری نداریم. حتماً باید فرازبان داشته باشیم، امّا اوّلش می گفت: یک سیستم ِمحض است چه کار به فرازبان داریم؟ بعدش می بیند که این سیستم مسبوق است یعنی حتماً باید یک چیزهایی باشد که پایه کار باشد تا بتواند یک سیستم صوری به پا بشود. سیستم صوری پیزوری ترین مباحثی است که دم دست همه هست که حتی در کتاب های رایج می گویند: صرف فرض ِذهن است. مکرّر در مباحثه مان عرض کردم که فرض نیست، در ِباغ است، هر سیستم، هر اصل موضوع، هر نظامی که بین اصل

موضوع با قضایای متفرع بر او بار می شود، نظام اصل axiomatic و نظام اصل موضوع[6] که به پا می شود تمام این اصول پشتوانه فرا زبان دارند، فرا نظام دارند، ممکن نیست این بدون آنها به پا بشود امّا ابتدا آدم کجا به آن توجه می‌کند؟! بعد از اینکه اُنس گرفت می گوید: بله، تا آنها نباشند نمی شود.

منظور ما از سبقت این است، یعنی نمی شود از حقانیت استحاله تناقض بحث کرد مگر این که بعد از این که انس گرفتیم می بینیم که در یک بستر و در یک نظام این حقانیت ِخودش را دارد، یک عنصر مستقل اتمی نیست -این اتمی را نمی دانم راسل در آورده ای دیگران، می گوید: صدق اتمی، در منطق دیدید که اینها را می گویندقضایای اتمی، اصطلاحات جور واجور است که یکی مال ِراسل است و دیگری مال ِویتگنشتاین است، اینها را به کار می برند و بعضی نکات خوبی در

فضای فکری دارد[7]-عرض من این است که بعد از این که خوب آگاه شدیم، می بینیم استحاله تناقض، یک اَتم نیست بلکه یک cell است از یک جدول.

تبیین مسبوقیت حقایق به خداوند متعال

پس عرض من از سبقت این است، نه اینکه یعنی ما یک چیز مقدّس آمپول را همان طوری که اشاعره می گویند درآوریم و بگوییم: چطور خدا را قبول داری؟ اگر خدا را قبول داری مِشمِش را او مِشمِش کرده، این چه حرفی است؟ یا تناقض را هم او قرار داده، اصلاً این ها منظور ما نیست، این مقدس آمپولی در منطق و معقولات است. عرض من این است که تمام منطق ها حتی، یک نظام های منطقی که خودشان منطق های جور واجورند، منطق ارسطویی، منطق ریاضی، آن اندازه ای که صرفاً تفاوت های صوری است که هیچ، آنجا که واقعاً به حوزه های مختلف ِشان اخت مربوط است و حوزه های اختصاصی خودشان، همه مسبوق به خدای متعال است، اصلاً نمی شود امّا باید بدانیم که وقتی می گوییم: خدای متعال، آن مبدأ مطلقی که حقانیت همه به او هست، امّا حقانیت من به این نحو که الآن از اینجا قرض گرفته بودیم که اگر خدا نکرده بود پس تناقض ممکن بود. این خنده دار می شود که تناقض ممکن بود.

قاعده تناقض؛ مسبوق به خداوند

حال ببینید شما می گویید: **اگر** تناقض محال نبود، **اگر** خدا او را چنین نکرده بود پس ممکن بود. تمام این اگرهایی که می گویید دارید چه کار می کنید؟ می گویید: اگر خدا تناقض را محال نکرده بود پس تناقض می توانست ممکن باشد. خود ِاین «**اگر**» که برقرار می کنید ای قضیه صادقه است ای کاذبه، اگر دارید راست می گویید و ملازمه ای که می گویید درست است، این باز مسبوق است؛ یعنی تا دهان باز می کنید دنبال چه چیزی هستید؟ دنبال یک رابطه اید، دنبال یک چیزی هستید که می خواهید بگویید: درست است، حق است، صدق است. مطلب فرا زبانی اش در اینجا چیست؟ تا می گویید: اگر P آنگاه q، فرازبان ِاین «اگر» چیست؟ چرا به خودتان اجازه می دهید بگویید: اگر این جوری، آنگاه آن جوری؟ چون پذیرفتید که ما یک ارزش ِمَنَاطِ ِصدق داریم، اصالً صدق و کذبی مطرح است، ما صحیح و غلطی داریم لذا می گوییم: «اگر، آنگاه»، و إلاّ شما بگویید: ما اصالً صدق و کذبی ندارید. اگر نپذیرید می توانید بگویید: «اگر، آنگاه»؟ ببینید قبالً توجه ندارید (بعد که می گوییم می گویید: بله درست است.)، تا من می گویم: اگر خدا او را محال نکرده بود، با این «اگر» می خواهم ملازمه برقرار بکنم. برقراری ملازمه یعنی می دانم که یک دستگاه صدقی هست، مالک صدقی هست، فضای صدق و کذب و مطابقت هست، من هم می خواهم یک ملازمه صادقه برقرار بکنم، ملازمه حق، صدق، راست بگویم. پس ببینید یک بستری بود بستر مالک صدق، ارزش صدق، در آن بستر من دارم ملازمه برقرار می کنم ولی وقتی که برقرار می کردم توجه به آن بستر نداشتم.خود ِهمین مالک صدق باز یکی از چیزهاست

و لذا عرض من این است که ما یک حق هایی داریم که مقابل ندارند، فضای صدق و کذب، حق و باطل، فرا زبانش آن که بستری است که اینها در آن مطرح هست خیلی جالب است؛ به شرطی که آدم ذهن را ببرد. خود بستر آنها یک حق و صدقی است که مقابل ندارد؛ یعنی حق و باطل مقابلی، صدق و کذب ِمقابلی همه اینها، بسترش یک بستر حقانیتی است که مقابل ندارد. مثالً بطلان، یعنی باطل بودن، امر باطل، بطلان ِامر باطل در چه بستری است؟ می گویید: هیچی، لفاّظی است. بطلان امر باطل را شما می پذیرید؟! می گویید: بطلان او حق است، عجب! بطلان حق است!؟ می گویید: بله بله، بطلان حق است. وقتی درک کردید سریعاً تصدیق می کنید یعنی یک بستری را می بینید که آنجا بطلان هست و باطل هم حق می شود و هیچ ابایی هم ندارید، امّا اگر کسی مقصود شما را نگرفته باشد مسخره می کند[8].]

---

[1] اشاره به مقاله بی خدایی گام به گام و پاسخ آنکه با عنوان «با خدایی گام به گام» انتشار یافت و بخشی از آن در فصل سابق مطرح شد.

[2] و اعلم أن الواحد الذي هو قائم بغير تقدير و ال تحديد خلق خلقا مقدرا بتحديد و تقدير و كان الذي خلق خلقين اثنين التقدير و المقدر فليس في كل واحد منهما لون و ال ذوق و ال وزن فجعل أحدهما يدرك بالآخر و جعلهما مدركين بأنفسهما و لم يخلق شيئا فردا قائما بنفسه دون غيره لذي أراد من الدلالة على نفسه و إثبات وجوده **و الله تبارك و تعالى** فرد واحد ال ثاني معه **ال يمسكه و الخلق يمسك بعضه بعضا** بإذن الله و مشيته(التوحيد (للصدوق) ؛ ص438-۴۳۹)

[3] تفصیل این مطلب را در برهان فرارابطه و در مقاله گردآوری«سه برهان تنبیهی بر مبرهن البرهان» مشاهده کنید.

[4] زبان طبیعی و زبان صوری:

زبان طبیعی همان است که با آن سخن می‌گوییم و نیازهای اجتماعی خود را برطرف می‌سازیم. در مقابل، زبان صوری زبانی است که با توجه به نیازهای علمی گوناگون ساخته می‌شود.

یک زبان صوری مثل L دارای عناصر تشکیل دهنده زیر است:

فهرستی از نمادهای L(واژگان)

مجموعه‌های معین از «قواعد ساخت» برای ترکیب نمادهای L به‌منظور به‌دست‌آوردن «فرمول ها»

مجموعه‌های معین به نام «تعاریف» برای معرّفی نمادهای جدید بر مبنای نمادهای اولیه L (ممکن است مجموعه مزبور تهی باشد؛ یعنی L بدون تعریف باشد)(مبانی منطق جدید، ص ۸)

دیدیم که جمله های زبان طبیعی در ترجمه به زبان منطق جمله تبدیل به زنجیره هایی از نشانه ها ی نمادها (symbols) می‌شدند در این ترجمه آنچه از جمله ها به جا می ماند نوعی ساختار های صوری زبانی ساخته‌ای منطقی بود از این رو این زبان را زبان نمادی شده (formalized language) ی زبان صوری (formal language) می‌نامند. در فصل پیش با این زبان صوری آشنا شدیم، اما درباره روش ساختن آن سخن نگفتیم زبانهای صوری زبانهایی هستند که بر اساس نیازهای گوناگون ساخته می شوند و به همین دلیل آنها را زبانهای ساختگی(artificial languages) نیز می گویند. برای ساختن این زبانها باید

(۱) مجموعه نشانه هایی را که جمله های زبان از آنها ساخته می شوند تعریف کرد؛

(۲) قاعده هایی را که برای پشت سر هم نهادن نشانه ها برای ساختن جمله های آن به کار می رود به دست داد.

جمله هایی را که بر اساس این قاعده ها ساخته شده باشند جمله های درست ساخت می نامیم.

در اینجا درست ساخت(well-formed) به معنای ساخته شده از نشانه ها بر اساس قاعده هاست.

مجموعه نشانه‌ها را واژگان (vocabulary) و قاعده‌ها را قاعده‌های ساخت(formation rules) می‌گوییم.(درآمدی به منطق جدید، ص ۶۷-۶۸)

[5] به کمک زبان می‌توانیم درباره آنچه بیرون از زبان است گفتوگو کنیم و هم درباره خود زبان. در کاربرد اول موضوع زبان شیء های بیرون از زبان است و در کاربرد دوم شیءهای زبانی. برای مثال در جمله

(الف) خورشید دمیده است؛

کلمه اول نامی است برای شیئی خارجی، اما اگر بخواهیم درباره این کلمه نه به عنوان برای شیئی خارجی بلکه به‌عنوان یکی از شیئ های زبانی، صحبت کنیم و برای مثال بگوییم این شیء زبانی از شش حرف ساخته شده است، دیگر نمی توانیم این کلمه را به همان شکلی که در (الف) به کار بردیم، به کار بریم و بنویسیم:

ب) خورشید از شش حرف ساخته شده است؛

زیرا آنچه مسلم است در این جمله هم کلمه اولی نامی است برای شیئی، اما چون این شی از شيء جمله (الف) متفاوت است ناچار برای اینکه در اشتباه نیفتیم، باید نام متفاوتی هم برای آن انتخاب کنیم.

در جمله (ب) شیء زبانی مورد بحث يك نام بود اما شیئ های زبانی تنها نامها نیستند. برای یک زبانشناس تمام نشانه های یک زبان و ترکیبهای گوناگون این نشانه ها با هم، موضوع گفتگو هستند. برای مثال اگر بخواهیم ساختار نحوی و معنایی زبان ووانی را بررسی کنیم، تمام نشانه های این زبان از حرف تا جمله شیئ های زبانی ما خواهند بود.

در این بررسی فرض کنید با زبان فارسی درباره زبان ووانی گفتگو می کنیم. زبان فارسی در کار برد متداول خود ابزاری است برای گفتگو درباره جهان خارج، و موضوع آن شیئ ها و رویدادهای جهان خارجند اما وقتی با این زبان درباره زبان ووانی گفتگو کنیم موضوع آن زبان ووانی می شود.

از موشکافیهای منطقدانان جدید جدا کردن این دو گونه کار برد زبان از یکدیگر است. این جداسازی در موردی که موضوع بحث يك زبان خود آن زبان باشد و برای مثال بخواهیم با زبان فارسی درباره زبان فارسی گفتگو کنیم اهمیت فراوان می یابد. **در منطق، زبانی که موضوع بحث است زبان موضوعی و زبانی را که با آن درباره زبان موضوعی گفتگو می کنیم فرازبان مینامند**. به این ترتیب در مثال اول زبان ووانی، زبان موضوعی و زبان فارسی، فرا زبان و در مثال دوم زبان فارسی هم زبان موضوعی و هم فرا زبان است. و به بیان دقیقتر زبان موضوعی بخشی از فرا زبان است. در چنین موردهایی باید با افزودن نشانه ها و قراردادهایی زبان فارسی را چندان غنی کرد که بتوان با آن به روشنی و بدون گرفتار شدن در پارادکسهای منطقی درباره زبان موضوعی گفتگو کرد.

در این کتاب در جایی که نحو زبان منطق جمله ها را پایه گذاری می کردیم زبان منطق جمله ها زبان موضوعی و زبان فارسی فرا زبان ما بود و از این رو برای غنی کردن فرا زبان حرف های بزرگ الفبای لاتین را به آن افزودیم و آنها را به دلیل تعلق داشتن به فرا زبان متغیر نامیدیم. از این پس نیز در جاهای گوناگون نشانه های دیگری به این فرا زبان می افزاییم. اکنون مشکلی را که در جمله (ب) با آن روبه رو شدیم می توان چنین بیان کرد که در فرا زبان باید روشی برای ساختن نام از شیئ های زبانی پیدا کرد. انتخاب نام در بنیاد امری است قرار دادی و بنا بر این وابسته به انتخاب قرارداد کنندە، به عنوان مثال، برای نامیدن شیء زبانی مذکور در (ب) می توان این نامها را به کار برد:

(1) كلمه اول جمله (الف)؛

(۲) کلمه فارسی شش حرفی که نام خورشید است؛

(۳) کلمه ای که بترتیب از حرفهای نهم سی ام دوازدهم، شانزدهم، سی و دوم و دهم الفبای فارسی ساخته می شود؛

(۴) سمندیس

اما نام (۱) و (۲) مخصوص این مثالند و هیچ قاعده کلی برای ساختن نام به دست نمی دهند. نام دوم حتی ممکن است ابهام هم داشته باشد یعنی کلمه شش حرفی دیگری هم در فارسی پیدا شود که نام خورشید باشد نام سوم قاعده ای کلی برای ساختن بسیاری از شیئ های زبانی به دست می دهد اما این نامها گذشته از طولانی بودن کمبودهایی هم دارند. هر زنجیره ای از نشانه های زبان شیئی زبانی است اما این زنجیره ها تنها با پشت سر هم نوشتن حرفهایشان مشخص نمی شوند. فاصله کلمه ها با هم، کسره های اضافه و بسیاری چیزهای دیگر هم باید در این نامگذاری

گنجانده شوند. نام‌گذاری (۴) همه به دو برابر کردن نام‌ها و پیچیده کردن زبان می انجامد.

قراردادی که می‌توان گفت قبول عام یافته این است که در ساختن نام‌های برای شیئی زبانی، آن شیء زبانی را درون گیومه ای علامت نقل قول بگذاریم و برای مثال جمله (ب) را چنین بنویسیم:

:«خورشید» (یا 'خورشید(' از شش حرف ساخته شده است؛

و نیز

«خورشید» نام خورشید است؛

خورشید را در فارسی «خورشید» می نامند. (درآمدی به منطق جدید، ص ۲۳۵-۲۳۷)

با این عنایت زبان موضوعی، زبانی است که با آن در مورد اشیا صحبت می‌کنیم. اما شاخصه این زبان آن است که انسان به خود آن متوجه نیست بلکه آن را ابزاری برای انتقال معانی می‌داند. حال وقتی در نگاهی درجه دو به خود زبان توجه کردیم زبان مورد توجه، می‌شود فرازبان.

در متن بالا نیز مقصود از فرازبان را باید این‌گونه یافت: نظام پشتوانه زبان موجود. نظام‌می که در بادی امر برای انسان جلوه نمی‌کند، بلکه انسان آن را مسلق و اصل موضوعی برمی شمارد اما بعد از کمی تأمل و وقتی چشمانش به فضای بحث آشنا شد و عادت کرد، آن گاه معالم این نظام بالاتر آشکار می‌شود.

[6] پایه گذاری منطق به روش اصل موضوعی، قدیمی‌ترین روش است و سابقه آن در منطق سنتی به ارسطو و در منطق جدید به گوتلوب فرگه (۱۸۲۸-۱۹۲۵) می رسد. در این روش پس از ساختن یک زبان صوری برای منطق، چند زنجیره درست ساخت را به عنوان اصل موضوع(axiom) و يك يا چند قاعده را به عنوان قاعده ای قاعده های استنتاج معرفی می کنیم. مجموعه این زبان صوری، اصل‌ها و قاعده ها نظام صوری اصل موضوعی (formal axiomatic system) نامیده می شود.

در نظام‌های اصل موضوعی برخلاف نظام استنتاج طبیعی، قاعده ها بسیار كم (يك يا دوقاعده) و در نتیجه اثبات فرا قضیه های منطق در آن‌ها آسان‌تر است. از سوی دیگر اثبات قضیه ها و صورت برهان‌ها در این نظام‌ها دشوار و وقت گیر است.

نظام‌های اصل موضوعی انواع گوناگونی دارند.(درآمدی به منطق جدید، ص ۳۵۱)

در تبیین منطق جدید از سه روش می‌توان بهره گرفت:«روش اصل موضوعی»،«روش استنتاج طبیعی» و «روش نمودارى».

۱. روش اصل موضوعی: این روش که در اصل به کارهای ارسطو در منطق سنتی و به کارهای اقلیدس در هندسه بر می‌گردد یک علم را بر پایه تعداد محدودی اصول موضوعه و قواعد استنتاج پی ریزی می‌کند. اولین سیستم اصل موضوعی منطق جدید در سال ۱۸۷۹ در کتاب مفهوم نگاری فرگه معرفی و ارائه شد و پس از آن با طراحی مجدد در آثار راسل و وایتهد هیلبرت، رسر، نیکود، لوکاسیه ویچ(L. Lukasiewicz)، هیتینگ و بعضی از منطقدانان دیگر ظاهر گردید. به کارگیری این شیوه اگر چه در مقام تأسیس یک سیستم منطقی و به طور کلی در بحث‌های نظری منطق ارزش فراوانی دارد، در مقام عمل و کاربرد ، بویژه در عرصه آموزش و تعلیم با دشواری‌های فراوانی همراه است.

ه س یستم صوری مانند S را که با این روش بیان شده باشد « سیستم اصل موضوعی S» می نامیم.

۲ . روش استنتاج طبیعی. گرهارت گنترن(Gentzen) منطقدان آمریکایی و استانیسلاو ایکوفسکی منطقدان لهستانی در سال ۱۹۳۴ این روش را به عنوان جانشینی برای شیوه اصل موضوعی مستقل از یکدیگر طراحی و ارائه کردند. در این شیوه، منطق تنها بر پایه تعداد محدودی از قواعد استنتاج پی ریزی میگردد (قواعد حذف و معرفی) فرا گیری قواعد مزبور بسیار ساده و آسان است و با طبیعت ذهن هماهنگی و سازگاری دارد.

از سال ۱۹۳۴ تاکنون تقریرهای متعددی از این شیوه ارائه شده است که از مهمترین آنها می توان از تقریرهای کوایـن، فیچ، سوپیس، کُپی، لمون، میتس و پرا ویتس (Prawitz) یاد کرد.

ه ر سیستمی مثل S را در صورتی که با این روش تأسیس شده باشد « سیستم استنتاج طبیعی S» می نامیم.

۳. روش نمودار ی. این روش که به «روش معنایی» و «روش درختی » نیز مشهور است در اواسط قرن بیستم به وسیله ریموند اسمولیان، اورت بت و یا کو هینتیکا پایه ریزی شد و بعدها ویلفرید هاجز(Hodges) و ریچارد جفری آن را تنقیح کردند. این روش بر تعداد محدودی «قواعد اشتقاق » استوار است که به صورت نمودارهای «درختان ارزش » هم نشان داده میشود. مکانیکی و نمودار ی بودن این روش ارزش عملی فراوانی را برای آن در عصر رایانه ها فراهم آورده است. (مبانی منطق جدید، ص ۵-۷)

[7] اتمیسم منطقی (به انگلیسی:Logical atomism) یک دیدگاه فلسفی است که در اوایل قرن بیستم با توسعه فلسفه تحلیلی شکل گرفت. حمایت کننده اصلی آن برتراند راسل فیلسوف بریتانیایی بود. همچنین محققان عموما ًبر این باورند که آثار اولیه شاگرد و همکار اتریشی الاصل او، لودویگ ویتگنشتاین، از نسخه های از اتمیسم منطقی دفاع میکنند. برخی از فیلسوفان در حلقه وین نیز تحت تأثیر اتمیسم منطقی قرار گرفتند (به ویژه رودولف کارناپ، که عمیقا ًبا برخی از اهداف فلسفی آن، به ویژه در آثار قبلی خود، همدل بود). گوستاو برگمان (Gustav Bergmann) همچنین شکل ی از اتمیسم منطقی را توسعه داد که بر زبان پدیدارگرایانه ایدئال تمرکز داشت، به ویژه در بحث های خود در مورد کار J.O. Urmson در تحلیل فلسفی.

نام این نوع نظریه در مارس ۱۹۱۱ توسط راسل در اثری به زبان فرانسوی با عنوان Le Réalisme analytique (که در ترجمه به عنوان «رئالیسم تحلیلی» در جلد ۶ مجموعه مقالات برتراند راسل منتشر شده) ابداع شد. راسل در حال توسعه و پاسخ به آن چیزی بود که او آن را «کلیگرایی منطقی» مینامید - یعنی این باور که جهان به گونه ای عمل میکند که هیچ بخشی را نمیتوان بدون شناخت اول از «کلیت» شناخت. این باور مربوط به یگانهگرایی است و با ایده آلیسم مطلق که در آن زمان در بریتانیا حاکم بود، مرتبط است. انتقاد از یگانهگرایی در آثار راسل و همکارش جی.ای. مور میتواند به عنوان بسط انتقادی آنها از ایدئالیسم مطلق که در آثار F. H. Bradley و J. M. E. McTaggart نیز وجود داشته تفسیر شود. بنابراین اتمیسم منطقی را میتوان به عنوان جایگزینی توسعه یافته برای کل گرایی منطقی ای «منطق یگانهگرا» ایدهآلیستهای مطلق درک کرد.

این نظریه معتقد است که جهان متشکل از «حقایق» (یا «اتمها») منطقی نهایی است که نمیتوان آنها را بیش از این تجزیه کرد و هر کدام را میتوان مستقل از واقعیتهای دیگر فهمید. ویتگنشتاین که در اصل این موضوع را در رساله منطقی-فلسفی خود مطرح کرده بود، در کتاب تحقیقات فلسفی آتی خود آنرا رد کرد.(ساید

ویکی پدیا)

اتمیسم منطقی راسل

اتمیسم منطقی تاریخچه پیچیده‌ای دارد و در دو نوشته راسل «فلسفه اتمیسم منطقی»(1918) و «اتمیسم منطقی»(1924) و همچنین گفتگو های راسل و ویتگنشتاین متقدم، طی سال‌های 1912-1913 ریشه دارد. «اتمیسم منطقی» توصیفی فشرده از نظام فلسفی راسل است که پایه هایش در منطق استوار شده و در مقابل ِشکل‌هایی از ایدئالیسم که واقعیت را یک کل واحد دانسته و هیچ گزاره‌ای را به تنهایی صادق یا کاذب نمی‌داند، شکل گرفته است. در مقابل، اندیشه راسل این بود که جهان از چیزهایی خاص تشکیل شده، و واقعیت‌هایی را که دربردارنده این چیزها هستند، می توان تفکیک و توصیف کرد، و بدین ترتیب گزاره‌هایی که درباره آنها گفته می شود، صادق یا کاذباند.

الف. اتمیسم منطقی از حیث روش‌شناسی: از حیث روش‌شناسی، اتمیسم منطقی به مثابه نوعی روش تحلیل یا تحلیل فروکاهشی (تحویل‌گرایانه) است. در نظر راسل فلسفه باید کار خود را با تحلیل قضیه همراه کند و در واقع یکی از مهمترین وظایف فلسفه تحلیل قضایا است. در فرآیند ِتحلیل، فیلسوف تلاش می‌کند، بنیادی‌ترین مفاهیم، که از طریق آنها دیگر مفاهیم، تعریف می شوند را شناسایی کند و از این طریق صدق گزاره‌ها را بررسی کند. او معتقد است شناختن معنای واژگان، مستلزم شناختن اشیای متناظر با آنهاست. در واقع راسل لازمه فهم یک گزاره را، آشنا بودن با مؤلفه‌های آن می‌داند. در نظر او تحلیل باید نشان دهد که یک گزاره از مولفه‌هایی ساخته شده است که ما با آنها آشنایی مستقیم داریم. او میان "معرفت از طریق آشنایی" و "معرفت درباره" تمایز می‌گذارد. تمایز میان "آشنایی مستقیم" و "معرفت درباره"، در واقع تمایز میان اشیایی است که ما از آنها تصوراتی داریم، و اشیایی که صرفاً به وسیل عبارتهای اشاره‌کننده ای عبارتهای وصفی، به آن رسیده‌ایم. به عبارتی در مشاهده، ما با متعلقات مشاهد خود و در اندیشه با اشیاء در شکل انتزاعی منطقی آنها آشنایی پیدا می‌کنیم. راسل معتقد است که علم ما به بسیاری از چیزها از طریق همین عبارتهای اشاره‌کننده – بدون این که آشنایی مستقیم داشته باشیم – بدست می‌آید. هرچند در نگاه او، نقطه آغاز اندیشه باید با آشنایی مستقیم همراه باشد.

ب. اتمیسم منطقی از حیث متافیزیکی: موضع فلسفی راسل که از آن با عنوان "اتمیسم منطقی" یاد می‌شود، نظریه‌ای است درباره جهان و ظرفیت انسان برای توصیف جهان از طریق زبان و اندیشیدن درباره آن.

راسل بر این باور است که جهان از واقعیتها تشکیل شده است. واقعیتها مرکبند و اتمها اجزای تشکیل‌دهنده آنها هستند. واقعیتهای حاوی این اتمها را می‌توان توصیف کرد و بدین ترتیب گزاره‌های درباره آنها یا صادق هستند یا کاذب. گزاره‌ها واقعیتها را توصیف می‌کنند و نامها نیز به جزئیها (که از طریق تحلیل به آنها رسیده‌ایم) اشاره می‌کند. بنابراین در ظرف جهان با واقعیتها و اتمها سر و کار داریم و در ظرف زبان با گزاره‌ها و نامها. در نظر او میان این زبان و جهان همریختی نیز وجود دارد، از یک سو گزاره‌ها با واقعیتها تناظر دارند و از سوی دیگر نامها با جزئیات. گزاره‌ها زمانی صادقاند که بین نحوه ترتیب یافتن اجزای گزاره و نحوه ترتیب جزئیات، رابطه یک به یک برقرار باشد.

راسل واقعیتها را نظام‌بندی می‌کند: واقعیتهای خاص مانند "این کتاب خسته کننده است" و واقعیتهای عام مانند "همه انسانها فانی‌اند". بنابراین واقعیتهای اتمی عبارتند از: اسناد یک صفت یا کیفیت به یک جزئی.

در واقع در اینجا تواز‌ی میان جملات بسیط و اشیاء بسیط وجود دارد. نکته حائز اهمیت این است که راسل منکر آن است که جهان شامل واقعیت‌هایی باشد که متناظر با گزاره‌های غیر اتمی (مولکولی) باشد، بنابراین گزاره‌های حاوی ادات منطقی "یا" ، "و" .. متناظر با هیچ واقعیت غیر اتمی در جهان نیستند.

او ادعا می‌کند که واقعیت‌ها را نمی‌توان نامید، بلکه تنها می‌توان آن‌ها را اظهار یا انکار ... کرد. این از آن جهت است که گزاره‌ها نامی برای واقعیت‌ها نیستند، زیرا که هر واقعیت با دو گزاره همراه است صادق و کاذب، درصورتی که میان نام خاص و یک شیء خاص تنها یک رابطه معین وجود دارد. در نظر راسل نام خاص منطقی نامی است که ما با مرجع آن آشنایی مستقیم داشته باشیم، و آشنایی در نظر راسل یعنی دریافت حسی مستقیم و بی‌واسطه. آنچه راسل یک نام می‌نامد، یک شیء جزئی است و همین جزئی معنای آن نام است. نامیدن یک شیء یا جزئی مستلزم آشنایی مستقیم با یک داده حسی است، یعنی به ازای یک عین واقعی که به حواس درآمده باشد، با یک نام خاص روبرو هستیم.

راسل با استفاده از تحلیل فروکاهشی، متعلقات علم فیزیک را به اموور واقع اتمی تحویل کرد؛ چرا که متعلقات فیزیکی زندراسل اموری نیستند که ما آن‌ها را از طریق تجربه، به شکل بی‌واسطه حاصل کنیم. در نظر راسل، تنها چیزی که از طریق تجربه و به شکل بدون واسطه دریافت می‌کنیم، داده‌های حسی شخصی در لحظه کنونی است. بنابراین اعیان فیزیکی اموری قابل حذف‌ند، بدین معنی که می‌توان جهان را بدون آن‌ها فرض کرد. راسل در مورد انسان نیز تحلیل فروکاهشی را به کار گرفت. به اعتقاد او، انسان عبارت است از سلسله خاصی از تجارب. با استفاده از تحلیل فروکاهشی در می‌یابیم که آنچه مثلاً از شخصیت بردار خود در ذهن داریم، همان چیزی است که از طریق ادراک حسی حاصل شده است.

بنابراین اتمیسم منطقی راسل بیانگر این واقعیت است که او در جستجوی بنیادی‌ترین مولفه‌هایی است که امور واقع مرکب از آن‌ها ساخته می‌شوند، و نه از حیث فیزیکی؛ چرا که خردترین عناصر فیزیکی خود از حیث منطقی قابل تحلیل هستند.

اتمیسم منطقی ویتگنشتاین

هنگامی که رساله منطقی- فلسفی ویتگنشتاین را با فلسفه اتمیسم منطقی مقایسه می‌کنیم، متوجه همانندی های آشکاری می‌شویم. در واقع نیمه نخست رساله را، که نوعی نظام متافیزیکی در آن پرورانده شده است، می‌توان نمونه‌ای از اتمیسم منطقی تلقی کرد. به طور کلی، آموزه‌های رساله را می‌توان شامل نظریه تصویری نظریه توابع صدق دانست.

ویتگنشتاین نیز مانند راسل گمان می‌کرد که وجوه ساختاری جهان در دو مقوله جای می‌گیرند: واقعیت‌ها و اشیاء. او همانند راسل بر این باور بود که واقعیت‌ها را نمی‌توان نامید، به عبارتی گزاره‌ها نام واقعیت‌ها نیستند، بلکه این اشیاء هستند که می‌توان آن‌ها را نام‌گذاری کرد. به همین جهت او مانند راسل میان وجوه جهان عینی، و زبانی که برای توصیف این وجوه به کار می‌رود، تمایز قاطعی قائل بود. در نظر ویتگنشتاین نیز فقط گزاره‌ها معنا دارند و صادق یا کاذب‌اند. در مقابل نام‌ها مدلول دارند، اما هیچ معنایی ندارند. نام همان شیئی را که بدان اشاره می‌کند معنا می‌دهد. نظریه تصویری ویتگنشتاین در واقع بیانگر این مطلب است که نحوه اتصال واقعیت به زبان از طریق گزاره‌هایی است که تصویر واقعیت‌ها هستند. در اندیشه ویتگنشتاین رابطه میان زبان و جهان دوگانه است. گزاره‌ها واقعیت‌ها را تصویر می‌کنند، و نام‌ها با پیوند اشاری خود به اشیاء، معنا را پدید می‌آورند. با این حال در نگاه او همه گزاره‌های زبان روزمره تصویرگر نیستند، بلکه صرفاً گزاره‌های پایه، که واقعیت اتمی را توصیف می‌کنند، تصویرگرند. بنابراین تنها نام‌های راستین که در گزاره‌های پایه ظاهر می‌شوند به یک عین موجود اشاره دارند.

ویتگنشتاین به یک دستگاه منطقی می‌اندیشد که جمله‌های پایه‌اش با واقعیتهایی که جهان را تشکیل می‌دهند رابطه همریختی دارند. این زبان آرمانی، تصویرگر ساختار جهان است و نه تنها اشیاء را می‌نامد، بلکه رابطه ساختاری آنها با یکدیگر را نیز ترسیم می‌کند.

تفاوت اتمیسم منطقی راسل با اتمیسم منطقی ویتگنشتاین

نظریه اتمیسم منطقی راسل از برخی جهات با نظریه اتمیسم منطقی ویتگنشتاین متفاوت است. رهیافت اتمیسم منطقی ویتگنشتاین، معنی شناسانه است. ویتگنشتاین در جستجوی این است که زبان چه خصوصیاتی باید داشته باشد، تا با معنا باشد. اما رهیافت راسل معرفت‌شناسانه است، ولی به تبع بحث از مسائل معرفت، بحث از معنا هم برای او مطرح می‌شود، چرا که معرفت شناسی راسل به تبعیت از سنت تجربه‌گرایی که در آن قرار دارد، با مسائل زبان پیوند دارد. در واقع همانطور که پیشتر اشاره کردیم، بر اساس اصل آشنایی، که از اصول معرفت‌شناسی راسل است، لازمه فهم یک گزاره، فهم معنای اجزایی است، که گزاره از آنها تشکیل شده است.

از دیگر تفاوتهای اتمیسم منطقی راسل و ویتگنشتاین متقدم این است که هر چند این دو، گزاره‌های زبان کامل را متناظر با امور واقع می‌دانستند، ولی ویتگنشتاین قائل به تنها یک نوع زبان و آن هم صرفاً در یک سطح بود؛ زیرا مطابق رسالهٔ، زبان عبارت است از گزاره‌های بنیادینو توابع صدق گزاره‌های بنیادین. گزاره‌های بنیادین تصویری از وضعیت عالم خارجاند، و امر واقع عبارت است از وضعیتی از اشیا و اعیان.

اما به نظر راسل، زبان دارای یک سطح نیست و سلسله مراتبی از زبانها وجود دارد. نظریه سلسله مراتب زبانهای راسل، متأثر از نظریه طبقات اوست که برای حل پارادوکسها آن را ارائه کرده بود. از نگاه راسل سطحی ترین مرتبه زبان، همان زبانی است که ویتگنشتاین آن را در رسالهٔ منطقی -فلسفی به عنوان تنها زبان ممکن معرفی می‌کند. چنین زبانی را راسل زبان - شیء می‌نامد. در زبان - شیء، بین بنیادی‌ترین اجزاء زبان، و بنیادی‌ترین اجزاء واقعیت، تناظری یک به یک وجود دارد. به نظر راسل در این مرتبه از زبان، نمی‌توان از چیزی غیر از امور واقع (برای مثال از خود زبان) سخن گفت و ویژگیهای آن را برشمرد. و اگر بخواهیم ویژگیهای این مرتبه از زبان را اظهار کنیم، باید با زبان مرتبه بالاتری سخن بگوییم.

شیء – واژه‌ها در مقام پایین‌ترین مرتبه این زبان، دارای معنا هستند و معنای آنها از طریق تجربه دریافت می‌شود. به عبارت دقیقتر راسل معنا را محدود به شیء -واژه‌ها کرده و در مورد جملات، دلالت را مطرح می‌کند. معنای شیء - واژه از تجربه اخذ می‌شود. اشیاء، یا همان امور واقع، به شرطی معنای یک شیء- واژه هستند که با حضور تجربی آنها، شیء- واژه توسط انسان بیان شود. این اندیشه راسل با رأی فیلسوفان تجربه‌گرای پیشین همخوانی دارد. در مقابل راسل معتقد است جملات، بر خلاف شی – واژه‌ها دارای دلالت هستند، نه معنا. یکی از تفاوتهای معنا و دلالت این است که معنا از تجربه اخذ می‌شود ولی دلالت نیاز به اخذ از تجربه ندارد. به نظر راسل حوزه دلالت وسیعتر از حوزه امور تجربه‌پذیر است. ممکن است از یک جمله تجربه‌ای نداشته باشیم، ولی دلالت آن را درک کنیم، چرا که معنای کلمات آن جمله را می‌فهمیم. بنابراین حوزه دلالت مستقل از حوزه صدق است .به نظر او صدق عبارت است از انطباق با واقع. اگر جمله‌ای با یک یا چند امر واقع رابطه ای برقرار کرد، آن جمله را صادق می‌دانیم و آن امر یا امور واقع را نسبت به این جمله تحقیقگر خواهیم دانست. اما این به معنای پذیرش پوزیتیویسم نیست، چرا که به نظر راسل رابطه بین امر واقع، یا همان تحقیقگر، و گزاره، رابطه‌ای عینی است، که مستقل از معرفت انسان و تجربه اوست در نظر راسل اسباب نهایی جهان واقعیتها هستند. واقعیتها همواره موجود خواهند بود، حتی اگر فاعل شناسا وجود نداشته باشد. صدق و کذب گزاره‌ها در ارتباط با واقعیات است که مشخص می‌شود.(سایت پژوهه، اتمیسم منطقی)

[8] جلسات حکمت و عرفان شیعی، جلسه نهم

پاسخ به شبهه ملحدین

اعداد اول بی‌نهایتند. این ها،بی‌نهایت هستند- مقصود نفس‌المرئیت داشتن آن‌هاست، نه این‌که وجود توصیفی در مقابل عدم داشته باشند که بعد قرار باشد معروض داشته باشند -این بی‌نهایت، نفس‌المرئیت دارد و متعلق علم خداست. کانتور که وارد نظریه مجموعه‌ها شد می‌خواست توری بیندازد که این حقایق نفس‌المرئی را شکار کند و به مشکلی خورد که گویی نمی‌توان چنین توری درست کند؛ آنگاه این سوءاستفاده‌کنها (بی‌خدایان مثبت گرا) می‌گویند حال که تور نداریم، عالم ِبه آن هم نداریم. آخر چه ربطی هست.

اولاً ًکه علم خدا علم حضوری است، نه علم حصولی که در نظریه مجموعه‌ها مورد نظر است. یعنی خود آن واقعیات علم خداست، و اگر بی‌نهایت واقعیت هست پس خدا به آن ها علم دارد.

ثانیاً ًاین که تور شما مشکل دارد، دلیل نمی‌شود که علم حصولی هم نتوان داشت. از باب تنظیر می‌توان این مثال را آورد که ما بی‌نهایت عدد داریم؛ اما یک عدد بی‌نهایت نداریم؛ یعنی توری نداریم که عددی به نام عدد بی‌نهایت را بتواند برای ما شکار کند؛ چون روی هر عددی دست بگذاریم، عدد بعدی در کار است. پس ما عدد ِبی‌نهایت نداریم در حالی که بی نهایت عدد داریم و بین این دو تنافی‌ای نیست. یعنی می‌شود تور نداشت اما واقعیت را داشت و علم خدا که متن واقعیت است.

به علاوه بعداً ًتلاش‌هایی کرده‌اند که این تور را درست کنند. این نظریه ابتدا که مطرح شد بی سر و ته بود و خود ریاضی‌دانان گفتند جایی که خوشتعریف باشد[1] (یعنی تعریفش واضح و ضابطه‌مند باشد) این مشکلات پیش نمی‌آید اما یک جاهایی خود تعریفش مشکل دارد و این مشکلات پیش می‌آید. آن چه برای ما مهم است این است که بستر حقائق، نفس‌المرئیت دارد و این نفس‌المرئیت تلازمی با شکار شدن در نظریه مجموعه‌ها ندارد؛ یعنی اگر شکار کننده‌های نداشتیم، دلیل نمی‌شود که بستر حقایق در کار نباشد.

بی نهایت؛ ادراک عقلی، ادراک خیالی

اکنون به سراغ برخی دیگر از فقرات متن برویم.

> يک دسته از حقايق حقايق گزاره اي اي قضيه اي هستند، که مي‌توان آن‌ها را بر اساس اصل دوالنسي منطق صحيح اي غلط دانست. بعنوان مثال هرکدام از روابط رياضي موجود بين اعداد حقيقتي هستند. يعني 4=2+2 يک حقيقت است و همچنين 0=2-2 يک حقيقت ديگر. حال از آنجا که اين حقايق قابل تميز داده شدن از يکديگر هستند مي‌توان اجتماع آن‌ها را بصورت يک

> مجموعه تصور کرد.

به این کلمه «میتوان» که ما زیرش خط کشیدهایم دقت کنید. یعنی تصور آن هابه عنوان یک مجموعه، یک گام بعدی است. حالا ممکن است شما نتوانید آن هارا به عنوان یک مجموعه تصور کنید؛ آیا این به معنای نفی حقیقت داشتن آنهاست؟ حتی ممکن است به آن هاعلم حصولی پیدا کرد، اما نه به عنوان یک مجموعه؛ یعنی هیچ اشکالی ندارد که ما بتوانیم آن هارا به عنوان علم حصولی درک کنیم، اما در مجموعه ساختن از آن ها دچار مشکل شویم. مثلا آیا ما به این که اعداد بینهایتند، علم حصولی داریم یا خیر؟ما بینهایت عدد داریم، آیا به این بینهایت عدد علم حصولی داریم؟

نکتهاش در این است که در عرصه بینهایت ها، یک بار علم حصولی به معنای درک عقلی مورد نظر است یک بار به معنای درک خیالی. ما از بینهایت عدد، درک عقلی داریم؛ یعنی همین که مفهوم عدد طبیعی را درک کردیم، همه اعضای اعداد طبیعی را به وجهی میشناسیم که چیست؛ یعنی هرکدام را که بیاورند ما آن را میشناسیم؛ شما انسان را میشناسید؟ میگویید بله، میشناسم، میگویم شما که تمام انسان ها را نمیشناسید؟ میگویید هر انسانی را بیاورید بما انه انسان او را میشناسم. اما درک تخیلی به این معنا که کل اعداد طبیعی را در یک زمان در ذهن سان بدهیم و حاضر کنیم، این را نداریم. آیا قوه عقل میتواند بینهایت عدد را سان دهد؟

اعداد هرکدام «نوع ُبرأسه[2]». اعداد، چیزی حقیقی نیستند که بگویید شأن عقل، ادراک چیزی نیست. هرکدام این ها یک طبیعتند که عقل میتواند درک کند. اما بینهایت طبیعت است. عقل میتواند این ها را درک کند و همه را در ذهن، سان دهد؟

-□□□ □□□□□□[3] □□□□□ □□□□□ □□□□□ □□□ □□□ □□ □□ □□□□□ □□□□ □□□□□□.

از این باب که درک یک نحوه احاطه است و وقتی محیط شد، محاط محدود است.

در واقع هر بینهایتی در اینجا از یک حیث دیگر محدود است. ما که احاطه بر او پیدا میکنیم از آن حیث محاط ماست، اما خود عقل که محیط بر اوست خودش هم لایتناهی است از یک حیثی. یعنی اگر محیط، خودش از آن حیثی که محیط است نامحدود باشد، لازم نمیآید که محاط، محدود باشد ؛لذا عقل که بر چیزی محیط میشود از همان جهات ادراک عقلیاش، همان نامحدودیت را دارد، پس محاطِ او هم که بینهایت عدد طبیعی است، منافاتی ندارد که محاط باشد و بینهایت هم باشد.

-□□□ □□ □□□□□[4] □□ □□□ □□□□□□ □ □□□□□□□ □□□□□□□ □□□ □□ □□□□□□□ □□ □□ □□□□ □□□□□□□□

مرحوم آقای طباطبایی در اصول فلسفه در جلد پنجم مطالبی دارند و حاصل فرمایششان بعد از این که به اینجا میرسند که «خدا بینهایت است» این است که خود همین تعبیری هم یک جور حد قائل شدن برای خداست[5]. این شاید اشاره به همان مطلبی باشد که امام به کسی که گفت «الله اکبر من کل شیء» فرمود: «حددته»[6].

پاسخ جدلی

>

> قبل از جواب حلی میتوان جوابی جدلی داد که فرق است بینانین که عضوهای یک مجموعه خود مجموعه باشد و بینانین که عضوها غیر مجموعه باشد، چون در اولی اجتماع فقط به فرض است و واقعیت ندارد، و همچنین عضوهای یک مجموعه با زیر مجموعه های آن تفاوت میکند، بنابر این در مجموعه ای که اجتماع در آن فرضی باشد علم به عضوهای مجموعه تعلق میگیرد نه به اجتماع فرضی آن واو نه به زیر مجموعه های فرضی، مثال پنج نفر معین را به عنوان یک مجموعه در نظر بگیرید کسی که این پنج نفر را میشناسد میتوانیم بگوییم عالم به اینها است ولو علم باین که شما آن پنج نفر را به عنوان یک مجموعه در نظر گرفته اید نداشته باشد و همچنین شما که عضوهای مجموعه خود را میدانید میتوانیم بگوییم عالم به این مجموعه هستید هر چند علم به زیر مجموعه های ممکن آن نداشته باشید، به همین بیان مثلا علم میتواند تعلق بگیرد به کاردینال الف که در قبال آن اعداد حقیقی قرار میگیرند چون عضوها و عناصر مجموعه فرضی نیستند بلکه حقیقت دارند اما علم به کاردینال پس از آن که تنها از قوت مجموعه توانی آن حاصل شده باشد لازم نیست تعلق بگیرد چون صرف فرض است، به خلافاینی که کاردینال بعدی متعلق به مجموعه ای باشد که عضوهای آن خود مجموعه فرضی نباشد، و این جواب به این جمله استدلال آن هامربوط میشود: (بنابر این حقایقی [illegible] مجموعه توانی، حقیقتی را اضافه نمیکند چون جز فرض زیر مجموعه های یک مجموعه چیزی نیست.

جواب جدلی‌ـفوق، جواب ساده‌ای است که نشان می‌دهد درک این ها چقدر ضعیف است. یعنی اگر کسی آن جواب‌ـحلّی را متوجه نشود، همین جواب جدلی برای نشان دادن ضعف استدلال این ها کافی است. تقریر مطلب به زبان ساده این است که آیا عالم مطلق، لازم است به همه واقعیّات علم داشته باشد؟ یا من، اگر بخواهم فرضهای مختلفی درباره واقعیات بکنم ، باید به آن ها هم علم داشته باشد؟

البته چون او خالق من است و به فرض کردن من آگاه است، به این فرض ها هم علم دارد اما بحث این است که خود‌ـفرض کردن مگر واقعیتی ایجاد می‌کند که لازم باشد عالم مطلق به آن هاهم عالم باشد. یعنی نظریه مجموعه‌ها دارد یک فرض هایی از جانب ما درباره اشیاء را مطرح می‌کند. خود اعضای مجموعه واقعیت دارند اما «مجموعه کردن آن‌ها» یک فرض ذهن من است و بعد زیرمجموعه‌های این مجموعه هم فرض ذهن من است. پس این که تعداد زیر مجموعه‌ها از تعداد اعضای اصلی مجموعه بیشتر شوند فقط ناشی از فرض های ذهنی من است نه این که در خارج چیزی بیشتر شده باشد و حقیقتی اضافه شده باشد. یعنی مثلاً دانستن مجموعه اعداد طبیعی، به این است که تمام اعضایش را بشناسید، حالا من بخواهم از این مجموعه، مکرّرا زیر مجموعه‌هایی فرض کنم و بگویم شما باید تمام این زیرمجموعه‌های مرا هم بالاستقلال مورد توجه قرار میدادی تا عالم به این مجموعه باشی، خواسته‌ی گزافی است و کسی که به فرض های ذهن من درباره این زیرمجموعه‌ها توجه نکند، بدین

معنا نیست که عالم به مجموعه اعداد طبیعی نباشد. (البته در جواب حلی توضیح خواهیم داد که این مفروضات، هم نفس‌المری دارند که خداوند به آن هاهم عالم است).

---

[1] در علم ریاضیات یک عبارت خوش‌تعریف است اگر بدون ابهام باشد و اشیای آن مستقل از نمایششان باشند. به عبارت دیگر، بدین معنی است که یک عبارت ریاضی منطقی و معین باش.

به زبان ساده‌تر یک تابع، خوش‌تعریف است اگر شکل ورودی تغییری کرد (نه مقدار آن)، مثلاً به جای ۰٫۵ مقدار۲÷۱ یا (۱/۲) دادیم مقدار خروجی تغییری نکند. خوش تعریفی تابع در این جا یعنی هر ورودی فقط یک خروجی داشتن، یعنی تابع بودن. اصطلاحاً وقتی می‌گوییم تابع خوش تعریف است یعنی تابع است. اما دلیل اینکه صفت خوش تعریفی را می‌آوریم این است که گاهی رابطه (قانون) ظاهرش نشان می‌دهد که قانون، یک تابع است اما وقتی به دقت آن را بررسی می‌کنیم می‌فهمیم که تابع نیست. در این موارد می‌گویند تابع خوش تعریف نیست.(سایت ویکی پدیا)

[2] هريك از مراتب عدد، يك نوع خاصّ محسوب مي‌شود. از اينرو، نمي‌توان گفت چند عدد باهم يك نوع را تشكيل مي‌دهند، و داراي افراد مختلفي هستند! امّا، اينكه چرا هر مرتبه‌اي از عدد - از عدد «دو» گرفته تا بي‌نهايت - يك نوع خاصّ را تشكيل مي‌دهد؟ دليلش آن‌ست كه هر مرتبه‌اي از عدد، ويژگي‌هاي مخصوص به خود را دارد. ويژگي عدد «دو» مخصوص به خودش مي‌باشد. ويژگي عدد سه نيز مخصوص به خود آن است. و همينطور اعداد ديگر. البته، ممكن است چند عدد در يك ويژگي مشترك باشند؛ چنانكه برخي از اعداد در فرديّت و برخي ديگر در زوجيّت مشتركاند. امّا، هر عددي يك ويژگي خاصّ به خود نيز دارد. از اينرو، هر مرتبه‌اي از عدد يك نوع مستقل شمرده مي‌شود.(شرح الهیات شفا،ج ۲،ص ۳۸۷)

[3] سؤال یکی از دوستان حاضر در جلسه درس

[4] سؤال یکی از دوستان حاضر در جلسه درس

[5] آخرين بحث فلسفي در صفات خداي هستي به نظريه‌اي منتهي شده كه از سطح سخنان گذشته بسي بالاتر است و آن اين است كه:

«چون هستي خدا از هر قيد و شرطي مطلق است و هيچ گونه حدي در آن جا نيست پس خود اين تحديد (هيچگونه حدي در آن جا نيست) نيز از آن جا منفي است و از اين رو وجود ايزدي از هر تحديد مفهومي نيز بالاتر و هيچ مفهومي (حتي اين مفهوم) نمي‌تواند به وي احاطه نموده و تمام حاكي بوده باشد».

بيشتر از اين اندازه را بايد از جاهاي ديگر سراغ گرفت.(اصول فلسفه و روش رئالیسم،ج۵،ص ۱۴۴)

همچنین مالحظه کنید: خداوند فوق ما ال یتناهی بما ال یتناهی

[6] 8- علي بن محمد عن سهل بن زياد عن ابن محبوب عمن ذكره عن أبي عبد الله ع قال: قال رجل عنده الله أكبر فقال الله أكبر من أي شيء فقال من كل شيء فقال أبو عبد الله ع حددته فقال الرجل كيف أقول قال قل الله أكبر من أن يوصف.(الكافي (ط - الإسلامية) ؛ ج1 ؛ ص117)