ب) کانتور؛ نظریّات و بازتاب آن

«بین ریاضی دان های قرن بیستم بحثی پیش آمده بود در قرن بیستم که به بهشت کانتور معروف شد. کانتور[1] یکی ریاضی دان بود؛ نظریه مجموعه‌ها را آورد، بعد هم اعداد ترانسفینی و اعداد بینهایت. در قرن بیستم ریاضیات، برای بینهایت‌ها دستگاهی به پا کرد.

سخن هیلبرت: «بهشت کانتور»

یکی دیگر از ریاضیدانهای مهم قرن بیستم هیلبرت بود. ایشان یک جمله‌ای گفت که جمله او بین محافل علمی معروف شد. چون عده‌ای بعد از کانتور بودند تا تلاش کنند این حرفهای او را ذوب کنند و حذف کنند؛ ضعیفش کنند و از بین ببرند[3]. او که خودش ریاضی دان بزرگی بود این جمله را گفت: احدی را یارای این نیست که ما را از بهشتی که کانتور برای ما آورد بیرون کند[4]. این جمله معروف شد. یعنی تلاشهای کسانی که می‌خواهند اینها را تعطیل کنند، تلاش بی خودی است. بهشت کانتور در قرن بیستم معروف شد.

امکان ارائه «بهشت کانتور» با شواهد

به گمان من طلبه، برای ما امکاناتی فراهم است تا این بهشت را نشان بدهیم؛ نه اینکه یک چیزی همینطور بگوییم. باید نشان داده شود. یکی از شئون مهم این باور کانتور را پارسال در عدد پی نشان دادم[5]. عرض کردم نقطه عدد پی روی محور، بین سه و چهارده تا سه و پانزده صدم قرار می‌گیرد، بین اینها بینهایت نقاط ممتاز متعین داریم. متعین ثابتی که هر چه پیشرفت کنیم آنها را به دست می‌آوریم. نه همینطور لایقفی[6]! نه، اعداد ممتاز.

بینهایت بالفعل؛ بینهایت لا یقفی

[از زمان ارسطو، تمام بی نهایت ها، چه بی نهایت بزرگ و چه بی نهایت کوچک را با بی نهایت بالقوّه حل می کردند.بی نهایت بزرگ را می گفتند: لایقف . بی نهایت کوچک را می گفتند: بالقوّه . ما هم با این دو تا خیلی مانوس هستیم چون مبنای کتابهای ما هم معمولاً ارسطویی است. انسان خودش را قانع می‌کند به بی نهایت لا یقفی و کار تمام می‌شود[7]]

در این فاصله کوتاه، شما می‌توانید یک مفهوم افلاطونی را نشان بدهید. این، یکی از شعب آن بهشت است؛ کسی که دنبال این‌ها است وقتی احساس کرد دیگر فاصله نمی‌گیری و دیگر به دیگری نگاه نمی‌کند. این خیلی مهم است؛ شما فقط این قدرت را داشته باشید که نشان بدهید. الآن گنگ بودن عدد پی در زمان ما صاف صاف است. فقط از لوازمش استفاده‌ای که باید بکنیم، نمی‌کنیم[8].

سخن ویتگنشتاین

یک جا دیدم؛ بعد از این‌که هیلبرت این حرف را زد، ویگنشتاین گفته بود: من که هرگز زحمت نمی کشم تا شما را از این بهشت بیرون کنم؛ من فقط یک کار می‌کنم؛ من توصیف می‌کنم و می‌گویم این بهشت نیست، وقتی خودتان دیدید که بهشت نیست، خب از آن بیرون می‌آیید[9]! چرا شما را از بهشت بیرون کنم؟! من توضیح می‌دهم که این بهشت نیست، لذا خودتان بیرون می‌آیید. چون شما به خیال بهشت آن جا مانده‌اید، وقتی من توضیح دادم که بهشت نیست، خودتان بیرون می‌آیید. این جمله‌ای بود که او گفته بود. ویگنشتاین این را در جواب هیلبرت گفته بود. او گفته احدی را یارا نیست، او گفته بود من این جور توصیف می‌کنم.

پاسخی به ویتگنشتاین

به ذهن طلبگی من آمد که به این صورت جوابش را بدهیم؛ بگوییم ما که حاضر هستیم شما توصیف کنید اینجا بهشت نیست تا بیرون بیایید. اما چرا بیرون تشریف دارید و توصیف می‌کنید؟! بیایید داخل بنشینید و تعریف کنید. از اینجا تعریف کنید که بهشت نیست. می‌دانید تفاوت در چیست؟ ویگنشتاین، فیلسوف تحلیلی است و شروع فلسفه تحلیلی بسیار مدیون او است. ظاهراً از استادش راسل اینطور نقل کرده‌اند: گفت زدم من آمد و گفت تشخیص شما چیست، استاد؟! اگر من فیلسوف می‌شوم بمانم، اما اگر نمی‌شوم یک شغلی را انتخاب کنم. خودش اینطور می‌گوید: اگر من را یک احمق می‌بینی خب فلسفه خواندن را رها کنم و مهندس بشوم. اگر من را احمق نمی‌بینی خب فلسفه را ادامه می‌دهم. استاد گفته بود، صبر کن تعطیلی ها پیش بیاید، من یک مقاله می‌دهم برو بنویس تا ببینم احمق هستی تا فلسفه را رها کنی یا نه؟! خب اینها شروع این فلسفه تحلیلی برای او بود[10][11].»

---

[1] گئورگ فردیناند لودویگ فیلیپ کانتور (۳ مارس ۱۸۴۵؛ [در برخی منابع ۱۹ فوریه نیز گزارش شده] – ۶ ژانویه ۱۹۱۸) ریاضیدانی آلمانی بود. آوازهٔ کانتور بیشتر به‌خاطر ابداع نظریه مجموعه‌ها می‌باشد چرا که امروزه به نظریه‌های بنیادین در ریاضیات تبدیل شده‌است. کانتور ایدهٔ تناظر یک به یک میان اعضای دو مجموعه را مطرح کرد، مفهوم بینهایت و مجموعه‌های خوشترتیب را تعریف نمود، و همچنین ثابت کرد که مجموعه اعداد حقیقی «بزرگتر» از مجموعه اعداد طبیعی است. در حقیقت، روش کانتور در اثبات این قضیه نشان می‌داد که مجموعه‌های نامتناهی از بینهایت‌ها وجود دارد. او اعداد اصلی و ترتیبی و حساب آن‌ها را تعریف کرد. **دستاورد کانتور از لحاظ فلسفی نیز جایگاه ویژه‌ای دارد و وی نیز به‌نیکی از این حقیقت آگاه بود**. در ابتدا تصور می‌شد که نظریه کانتور دربارهٔ اعداد ترانهتناهی (ترانسفینی) تا حدود زیادی خلاف شهود—یا حتی تکاندهنده—است، تا آنجا که با مقاومت شدید همعصران او همچون لئوپولد کرونکر و آنری پوانکاره، و بعدها هرمان ویل و لوئیتزن اخبرتوس یان برووار قرار گرفت، و لودویگ

ویتگنشتاین نیز در مورد نظریهٔ اراده‌های فلسفی بیان نمود. برخی از علمای مسیحی (بویژه پیروان جدید فلسفهٔ مدرسی) نیز می‌پنداشتند که دستاورد کانتور چالشی است بر یکتایی بی‌نهایت مطلق در طبیعت خدا؛ یعنی برابر دانستن نظریهٔ اعداد ترامتناهی با همه‌خدایی، در حالیکه **کانتور چنین مدعایی را به‌شدت در می‌کرد**. این اتفاقها در برخی مواقع حتی شدت بیشتری می‌یافتند: **پواناکاره از ایده‌های کانتور به‌عنوان بیماری گریوزی یاد می‌کرد و می‌گفت که این بیماری ظاهر ریاضیات را عفونی می‌کند**. کرونکر نیز در نزد عموم به‌مخالفت صریح با کانتور برمی‌خاست و به‌وی حملات شخصی می‌کرد؛ از جمله اینکه از او به‌عنوان یک "شارلاتان علمی،" یک "ازدین‌برگشته" و یک "فاسدکنندهٔ جوانان" یاد می‌کرد. کرونکر حتی از اثبات کانتور مبنی بر شمارا بودن اعداد جبری و ناشمارا بودن اعداد متعالی ایراد می‌گرفت، در حالیکه امروزه این نتایج بخشی از برنامه استاندارد درس ریاضی هستند. حتی دهها پس از مرگ کانتور، ویتگنشتاین با درغ نوشت که ریاضیات "مورد تاختوتاز اصطلاحات آسیب‌رسان نظریه مجموعه‌ها قرار گرفته‌است." وی چنین اصطلاحاتی را "مزخرف مطلق،" "خنده‌آور،" و "نادرست" تلقی می‌کرد. گفته می‌شود که علت مجموعه افسردگیهای کانتور از ۱۸۸۴ تا پایان زندگی او، دشمنی بسیاری از معاصرانش با وی بوده‌است، اگرچه برخی نیز از این افسردگیها به‌عنوان ظهور اختلال دوقطبی در وی یاد می‌کنند. این اتفاقهای شدید، بعدها به تحسین و تمجید تبدیل شدند. در سال ۱۹۰۴، انجمن سلطنتی جایزهٔ مدال سیلوستر را به‌وی داد که به‌عنوان بزرگترین جایزه و افتخاری تلقی می‌شود که برای دستاورد ریاضی به شخصی اهدا می‌گردد. گفته می‌شود **کانتور بر این باور بوده که نظریه اعداد ترامتناهی از سوی خدا به‌وی الهام شده بوده‌است**. مشهور است که داوید هیلبرت از دستاورد کانتور در برابر منتقدان، اینچنین دفاع می‌کرد: "هیچکس نمی‌تواند ما را از بهشتی که کانتور آفریده، بیرون کند."(سایت ویکی پدیا)

[2] داوید هیلبرت (آلمانی: David Hilbert، ۲۳ ژانویه ۱۸۶۲ – ۱۴ فوریه ۱۹۴۳) ریاضیدان آلمانی و از مشهورترین ریاضیدانان قرن نوزدهم و آغاز قرن بیستم میلادی بود. او از اثرگذارترین ریاضیدانان در پیدایش و گسترش مکانیک کوانتومی و نظریه نسبیت است. هیلبرت طیف وسیعی از ایده‌های اساسی را در بسیاری از زمینه‌ها شامل نظریه ناوردا، حساب تغییرات، جبر جابجایی، نظریه جبری اعداد، بنیانهای هندسه، نظریه طیفی عملگرها و کاربردهای آن در معادله انتگرالی، ریاضی فیزیک و نظریه برهان، کشف و توسعه داد.

او در کونیگسبرگ زاده شد و ۱۸۸۴ از دانشگاه این شهر دکترا گرفت و نزدیک ده سال را به تدریس در آن دانشگاه گذراند. سپس در ۱۸۹۵ به استادی دانشگاه گوتینگن رسید و تا پایان عمر در این شهر زیست.(سایت ویکی پدیا)

[3] در این زمینه به مقاله «GEORG CANTOR AND THE BATTLE FOR TRANSFINITE SET THEORY» (گئورگ کانتور و نبرد برای نظریه مجموعه های فرامتناهی) مراجعه فرمایید.

4] "No one shall drive us from the paradise which Cantor has created for us."(A glimpse of antor's paradise)

در این زمینه همچنین به صفحه«بهشت کانتور» در سایت فدکیه مراجعه فرمایید.

[5] جلسه ۸ فقه هوش مصنوعی

[6] مالصدرا در بيان اقسام بي نهايت و تفكيك بين بي نهايت بالقوة و بي نهايت بالفعل مي فرمايد:

و منها أن غير المتناهي على معنيين: أحدهما بالقوة و هو غير المتناهي باللايقفي

و ثانيهما بالفعل و هو غير المتناهي العددي، و مقدورات الله تعالى عند المتكلمين غير متناهية بالمعنى الأول لا بالمعنى الثاني لأنهم منكرون لوجود الغير المتناهي بالفعل مرتبا كان أو غير مرتب متعاقبا كان أو مجتمعا و التفاوت إنما يجوز في غير المتناهي بالمعنى الأول كقبول الجسم عند الحكماء للأنصاف المتداخلة غير المتناهية و الأرباع المتداخلة غير المتناهية و الثانية نصف الأولى.(الحكمة المتعالية، ج ٧، ص ٣١٨)

شهيد مطهري بي نهايت بالقوة را اين گونه تبيين مي كند:

اعداد متناهي نيستند؛ يعني اگر اعداد را بيان كرده و بالا برويم و بگوييم ١، ٢، ٣،...، ١٠٠٠،...، ١٠٠٠٠٠٠،... هر چه بالا برويم به عددي كه ما فوق آن نتوان عددي را فرض كرد نمي‌رسيم. هر عددي را كه ما فرض كنيم باز هم ما فوق آن عددي فرض مي‌شود، بلكه باراي آن دو برابر هم فرض مي‌شود، بلكه خودش ضرب در خودش هم فرض مي‌شود، خود آن به قو ٢ و ٣ و ٤ و ٥ و... هم فرض مي‌شود. هر عددي را كه شما اعتبار كنيد و بگوييد اين آخرين عدد است باز هم بالاتر از آن عدد است. اين است كه مي‌گويند اعداد غير متناهي است.

اما **اينكه مي‌گويند اعداد غير متناهي است، منظور غير متناهي بالفعل نيست، بلكه منظور «غير متناهي لا يقفي» است**. لايتناهي بالفعل يعني اينكه ما كه موجود بالفعل غير متناهي داشته باشيم، مثل اينكه كسي بگويد ستاره‌هاي عالم بالفعل غير متناهي‌اند، ذرّات عالم بالفعل غير متناهي‌اند؛ كه اگر كسي گفت ستاره‌ها بالفعل غير متناهي است، بايد بگوييم ما الآن غير متناهي عدد ستاره در خارج داريم. اين يك مسأله است. اما آنكه مي‌گويد عدد غير متناهي است، به اين معنا نمي‌گويد. منظور غير متناهي لا يقفي است. غير متناهي لا يقفي به ذهن ما برمي‌گردد، به خارج مربوط نيست؛ يعني ذهن ما هر عددي را كه اعتبار كند عدد در آنجا متوقف نمي‌گردد؛ امكان اعتبار عددي ديگر كه يكي بيشتر يا دوتا بيشتر يا دو برابر آن يا هزار برابر آن باشد هست. اين را مي‌گويند «لا يتناهي لا يقفي». شيخ همين جا اشكال خود را وارد مي‌كند.(مجموعه آثار شهيد مطهري، ج ٧، ص ٥٦٧-٥٦٨)

تناهي به دو معناست: يكي تناهي عددي، و ديگر تناهي لا يقفي.

نامتناهي عددي آن است كه شيء بالفعل موجود و نامتناهي باشد، مثلا خط و سطح و جسم بالفعل موجود باشد و نهايت نداشته باشد. و نامتناهي لا يقفي آن است كه بالفعل موجود نباشد، بلكه به هر مرتبه كه رسد باز در آن چيزي بتوان فرض نمود.چنانچه حكما گويند كه جسم قابل قسمت است الى غير النهاية، كه هر اندازه جسم را تقسيم كنيم باز هم قابل قسمت است و به انتهاء نمي‌رسد. و اينكه حكما گويند نامتناهي وجود ندارد مقصود نامتناهي عددي است، ولي نامتناهي لايقفي جائز و واقع است، مثل اينكه جسم به نامتناهي تقسيم مي‌شود و اين قسمتها به جايي نمي‌رسند كه ديگر تقسيم نشوند. حكماي قديم يونان مي‌گفتند ابعاد نامتناهي است.(مجموعه رسائل عرفاني و فلسفي،ص ٢٦٩)

اين اصطلاح اولين بار در كلام ارسطو به كار رفته است. او در اين باره مي گويد:

قال الإسكندر: هل المتحرك على عظم ما يتحرك في أول حركته على أول جزء منه، أم لا؟ و ذلك أن كل حركة إنما صارت في زمان لأنه ليس يمكن أن يتحرك المتحرك على الشيء الموضوع ليتحرك عليه

دفعة، لكنه يقطع منه شيئا بعد شيء؛ فإذا هذا هكذا، فالمتحرك يتحرك أولا على الجزء من أجزاء المتحرك على العظم الذي يتحرك عليه. فإن كان الأول في العظم يمر بالنهاية، فكل محرك يصير متحركا على الطرف الذي يتحرك عليه. و الأشياء التي بالنهاية أولية. و كل متحرك يتحرك بعد ما، فإنه يكون متحركا آخرا بالنهاية؛ و الأشياء التي بالنهاية القطع مسافته، فنقول: إنه ليس - إذ كانت قسمة الأشياء المتصلة بالقوة - من أحد أمرين: إما أن تكون الحركة في الجزء الأول، أو تكون قد تجوز على الجزء الأول من العظم إنما هو من قبل أن في العظم المتصل جزءا يتقدم و جزءا يتأخر. و ذلك أنه ليس الأجزاء في المتصل بحال غير الحال التي نقول بها إن المتحرك نفسه يقطعها؛ فكيف إذا يوجد بعض الأجزاء متقدما و بعضها متأخرا في المتصل، إما بالفعل أم بغير الفعل؟ فنقول: إنه ليس شيء من الأعظام المتصلة أجزاؤه منفصلة، و هي في الكل بالفعل، لأن العظم إنما هو غير منقسم بالفعل؛ و لو كان منقسما بالفعل، لما كان عظما واحدا، و لا كانت الحركة واحدة. فإذا كانت الأجزاء التي في الكل ليست بالفعل فيه **فقد بقي أن يكون في الكل الذي هو متصل بالقوة، و يكون المتقدم و المتأخر المتصل إنما هو بالقوة لا بالفعل، و يكون المتحرك عليه إنما يتحرك على الجزء الأول أو الحال التي يوجد بها الجزء في العظم، و وجوده فيه بالقوة.** فعلى هذه الجهة إذا يتحرك عليه. و إنما يفعل هذا من قبل أنه يتحرك عليه من غير أن يقسمه و من غير أن يجعل جزءا منه أو جزءا ثانيا بالفعل. و المتحرك إذا تحرك على هذه الجهة على العظم فإنما يكون متحركا في الأجزاء الأوائل على حسب ما هي في العظم بالنهاية، و **وجودها في العظم بالنهاية إنما هو بالقوة**. و معنى قولنا: إنه غير متناهية القوة، لا تقطع مسافتها؛ بل إنما وضعنا ذلك فيما كان بالفعل.(أرسطو عند العرب، صفحه: ۲۷۸)

وا رد جای دیگر رد مورد بی نهایت های بزرگ(رد اعداد) و کوچک(رد مقادیر) چنین می نویسد:

و بالواجب أيضا لزم أن يكون غير المتناهي أما بالزيادة فقد ظن أنه لا يمكن أن يتجاوز كل مقدار، و أما بالقسمة فقد يمكن؛ و ذلك أن <غير المتناهي و> الهيولى محاط بها من الخارج، و هي الشيء غير المتناهي و المحيط هو الصورة. و بالواجب أيضا صار في **العدد** في الذهاب إلى القلة نهاية، و **في الذهاب إلى الكثرة يزيد أبدا على كل عدة**. و صار **في المقدار** الأمر بالضد: أما إ**لى الصغر فقد يتجاوز كل مقدار**، و أما إلى الكبر فلا يمكن أن يوجد مقدار غير متناه. و السبب **العدد إنما هو** في ذلك أن الواحد غير منقسم - أيّ واحد كان - مثل الإنسان إنه إنسان واحد لا كثير، و **آحاد كثيرة و كمية ما. فقد يجب أن نقف عند ما لا ينقسم**، فإن الاثنين و الثلاثة إنما هي أسماء، و كذلك واحد من سائر الأعداد. **فإن أما ذهابه إلى الكثرة فقد يمكن توهمه دائما. و قسمة المقدار بنصفين، و نصفه بنصفين يمر بلا نهاية، فيكون <العدد غير متناه> بالقوة ؛ فأما بالفعل - فلا**. غير أنه قد يوجد منه ما يزيد دائما على كل عدة محددة، لكن هذا العدد ليس بمفارق لهذه القسمة، و لا بالنهاية أمر باق، لكنه أمر يتكون دائما، و كذلك الزمان و عدد الزمان.

فأما المقادير فإن الأمر فيها بالضد، و ذلك أن المتصل قد ينقسم بلا نهاية؛ غير أنه في العظم ليس يكون غير متناه. لأنه بأيّ مقدار كان يمكن أن يكون بالقوة، فإنه بذلك المقدار يمكن أن يكون بالفعل. فإذ ليس يوجد أصلا مقدار محسوس غير متناه، فليس يمكن أن يكون يفضل على كل مقدار محدود، لأن ذلك لو جاز لقد كان سيكون ما هو أعظم من السماء.(الطبيعة (أرسطو)، جلد: ۱، صفحه: ۲۶۳)

در کلمات سایرین:

و الجواب: أنّ النهاية إمكان القسمة خاصّة للأجسام كلّها. و كما لا يلزم من اشتراك الكلّ و الجزء في الجسميّة اشتراكهما في خواصّ المقدار، كذلك لا يلزم من اشتراكهما في خاصّة الجسم، و هي النهاية إمكان القسمة، اشتراكهما في خواصّ المقدار. سلّمنا أنّ الشيئين إذا اشتركا في عدم التناهي اشتركا في عدم التوالي، و لكن لا نسلّم أنّ **غير متناهي الأعداد كما**

المتناهية حاصلة بالفعل. أمّا إذا كانت بالقوّة فلا، كيف و الوجود يكذّبه.

ألا ترى أنّ الأولى المتضاعفة إلى غير النهاية بالقوّة و الإمكان فيها من المئات الغير المتناهية بالقوّة عشرة أمثالها، و من العشرات مائة أمثالها، مع أنّ عدد كلّ قدر من الثلاثة غير متناه بالقوّة؛ بمعنى أنّا إلى أيّ حدّ انتهينا في العدد أمكن الزيادة عليه؛ لكن لمّا لم تكن هذه الأولى الغير المتناهية حاصلة بالفعل، لم يلزم من الاشتراك في اللاّنهاية التساوي في الأعداد(حکمة الإشراق (تعلیقه مل صدرا)، جلد: ۱، صفحه: ۳۲۲)

السادس أن العدد ليس بمتناه و معناه أنه ال توجد مرتبة من العدد إلا و يمكن فرض ما يزيد عليها و كذا فرض ما يزد على الزائد و ال تقف السلسلة حتى تنقطع بانقطاع الاعتبار و يسمى غير المتناهي اللايقفي و ال يوجد من السلسلة دائما بالفعل إلا مقدار متناه و ما يزيد عليه فهو في القوة و أما ذهاب السلسلة بالفعل إلى غير النهاية على نحو العدول دون السلب التحصيلي فغير معقول فال كل و ال مجموع لغير المتناهي بهذا المعنى و ال تحقق فيه لشيء من النسب الكسرية كالنصف و الثلث و الربع و إلا عاد متناهيا. (نهایة الحکمة، ص ۱۱۲-۱۱۳)

[7] برشی از مقاله گردآوری «مثال دقیق، سؤال روان؛ ابزاری برای ارائه مجردات به همگان».

[8] نمونه‌ای از تلاش برای عینی سازی بهشت کانتور را در مقاله گردآوری «مثال دقیق، سؤال روان؛ ابزاری برای ارائه مجردات به همگان» ملاحظه می‌کنید.

[9] I would say, `I wouldn't dream of trying to drive anyone from this paradise.' I would do something quite different: I would try to show you that it is not a paradise — so that you'll leave of your own accord. I would say, `You're welcome to this; just look about you.' . . .
For if one person can see it as a paradise . . ., why should not another see it as a joke?) (Ludwig Wittgenstein)(The Infinite)

[10] راسل می‌گوید که در اواخر نخستین نیمسال تحصیلی، ویتگنشتاین در ۱۹۱۲ او پرسید: من یک احمق تمام عیارم یا نه؟ اگر بلی هوانورد خواهم شد و اگر نه فیلسوف. راسل در پاسخ پیشنهاد کرد که او در طی تعطیلات مقاله‌ای در باب یک موضوع فلسفی بنویسد. وقتی او در آغاز نیمسال جدید مقاله را به راسل نشان داد، او یک جمله از آن را خواند و گفت: نه تو نباید هوانورد شوی!(لودویگ ویتگنشتاین، ص ۱۲)

[11] جلسه سی و دوم فقه هوش مصنوعی

بازبینی #1
ایجاد شده 18 ژانویه 2025 06:27:37 توسط khoddami
به روزرسانی شده 18 ژانویه 2025 06:32:40 توسط khoddami