ج) تبیین نظریه کانتور

دسته بندی کانتور

«بهشت کانتور، بحث راجع به مجموعه های بی نهایت ها و دسته بندی مراتبشان و اعداد ترانسفینی است.

۱. «الف صفر»: مجموعه اعداد طبیعی و...

 ایشان مجموعه ها و بی نهایت بودنشان را رده بندی کرده است به همان حرف الفبای عبری[1]، اولین قوه بی نهایت را که اعداد طبیعی هستند اسمش را گذاشته است: «الف صفر».

[در این کتابهای منطق ریاضی میگویند بینهایتِ اُمگا[2]. اُمگا، آخرین حرف است[3]. یعنی پایینترین بینهایت. اولین بینهایتی که از نظر قوت بینهایتی از همه کمتر است، همان الف صفر است. اینها اعداد بینهایت ها است. یعنی همانطوری که عدد یک و دو داریم، بینهایتها هم درجه بندی دارد. پایینترین بینهایت، الف صفر است که همان بینهایت امگا است[4].]

«الف صفر»، کاردینالش یک کاردینالی ست که اولین درجه ی بی نهایت است.الف صفر، در اعداد ترانفسینی شروع کار است بعد هم اثبات می کند که به برهان قطری کانتور[5] معروف است، برهان خیلی خوبی است.آتئیست ها هم از این برهان برای مقاصد پوچ خودشان استفاده می کنند. در مقاله باخدایی گام به گام عرض کردم. هم استدلال آن ها را آوردم و هم عرض کرده ام که ربطی به مقصود آن ها ندارد[6].

علی ای حال با برهان قطری -در همین کتاب تاریخ ریاضیات هم هست- چه چیزی را ثابت کرده است؟ یک چیز عجیب؛ می گوید:شما بین دو و سه در مجموعه اعداد طبیعی، عددی دیگر پیدا نمی کنید. بینش چیزی نیست.اما هر دو عدد گویای بینش دوباره بی نهایت عدد گویای پیدا می کنید.این چیز کمی است؟! چه قدر گسترده می شود. در عین حال همین آقای کانتور در برهان خودش اثبات کرده که توان بی نهایتی مجموعه اعداد گویا با این فشردگی با توان بی نهایتی مجموعه اعداد طبیعی که می شمریم برابر است. لذا می گوید هر دو شمارا هستند شمارا یعنی تناظر یک به یک دارند.تناظر یک به یک در بی نهایت ها.

۲. «الف یک»: مجموعه اعداد حقیقی

اما وقتی می رسد به مجموعه اعداد حقیقی می گوید نه دیگر.توان بی نهایتی مجموعه اعداد حقیقی که اعداد گنگ هم در آن هست، بیش از «الف صفر» است لذا اسمش را گذاشته است: «الف یک».«الف یک» می شود مجموعه اعداد حقیقی که این همه گستردگی و این همه مباحث برایش مطرح

شده است.می گویند: مجموعه اعداد حقیقی، به اندازه کافی فشرده است؛
یعنی غیر از این که هر دو نقطه اش بینش بی نهایت نقطه و عدد هست، هیچ جای خالی هم بینش نمی تواند پیدا کند و لذا ناشمار است. کانتور برهان خلف اقامه می کند که «الف یک» مجموعه اعداد حقیقی ناشمار است. یعنی دیگر با اعداد طبیعی هم قوه نیستند. [یعنی خطی که اعداد حقیقی است، اعداد طبیعی و شمارش نمیتواند آنها را بشمارد[7]]

از همین برهان خلف کانتور، یکی مبنای فلسفه ریاضی پیدا شده است[8].

مبانی سه گانه در فلسفه ریاضیات

سه تا مبنا هست در منطق ریاضی و فلسفه ریاضی که زیاد از آن اسم می برند:

۱. صورت گرایی[9] فرمالیسم،

۲. منطق گرایی [10]Logicism،

۳. یکی هم شهودگرایی مال بروار[11].

شهودگرایی همین است. می گوید: برهان خلف کانتور را در اثبات «الف یک»، مجموعه اعداد حقیقی قبول ندارم.باید حتماً بسازیم تا اثبات کنیم. به صرف برهان خلف اثبات نمی شود.این ها هم بحث های خوبی است که در قرن بیستم انجام شده است[12].»

---

[1] الفبای عبری از ۲۲ حرف تشکیل شده‌است. صداهای زیر شیوهٔ تلفظ حروف عبری هستند

آلِف ? -- بِت ? – وِت ? -- گیمل ? – دالِت ? – هِ? – واو ? – زایین ? – خِت ? – تِت ? – یُد ? – کاف ? – خاف ? -- خافْسُفیت ? -- لامِد ? – مِم ? – مِمْسُفیت ? -- نون ? – نون سُفیت ? -- سامخ ? – عایین ? – پِ? -- فِ? -- فِسُفیت ? -- تْسادی ? – تْسادی سُفیت ? -- کُف ? – رِش ? – شین ? – سین ? -- تاو ?

2] Aleph-omega is
? = sup{ ?n | n ? ? } = sup{ ?n | n ? {0, 1, 2, ...} }
here the smallest infinite ordinal is denoted as ?. That is, the cardinal number ?? is the least pper bound of
?n | n ? {0, 1, 2, ...} }.
otably, ?? is the first uncountable cardinal number that can be demonstrated within ermelo–Fraenkel set theory not to be equal to the cardinality of the set of all real numbers 2?0: or any natural number n ? 1, we can consistently assume that 2?0 = ?n, and moreover it is

ossible to assume that 2?0 is as least as large as any cardinal number we like. The main estriction ZFC puts on the value of 2?0 is that it cannot equal certain special cardinals with ofinality ?0. An uncountably infinite cardinal ? having cofinality ?0 means that there is a countable-length) sequence ?0 ? ?1 ? ?2 ? ... of cardinals ?i < ? whose limit (i.e. its least upper ound) is ? (see Easton's theorem). As per the definition above, ?? is the limit of a countable-length equence of smaller cardinals.(Wikipedia)

?عدد ترتیبی مجموعه اعداد طبیعی N ، با رابطه کوچکتر ای مساوی معمولی، را معمولاً با حرف ونانی امگا ?نشان میدهند؛ یعنی:

? =ord(1,2,3,…) (آشنایی با نظریّه مجموعهها و کاربردهای آن، ص ۱۶۹)

بررسی اعداد اردینال به تعاریف مقدمات زیادینیاز دارد وما آنها را به صورت فشرده ای اینجا بیان می کنیم :

در تمام این بحث صفر را هم عضوی از اعداد طبیعی در نظر میگیریم.

مجموعه خوش ترتیب: یک مجموعه همراه با یک رابطه ترتیب را خوشترتیب گوییم هرگاه هر زیر مجموعه آن دارای عضو اقل (کوچکترین عضو) باشد. مثل مجموعه اعداد طبیعی.

دو مجموعه مرتب که تنها برچسب گذاری اعضایشان با هم تفاوت دارد را یکریخت ترتیبی (order isomorphic) گوییم، به این معنا که " عضوی از مجموعه اول از عضوی دیگردر این مجموعه کوچکتر باشد اگر وتنها اگر همتای آن عضوی از مجموعه دوم پیدا شود که از عضوی از آن مجموعه کوچکتر است" ، که به این تناظر یک به یک یکریختی ترتیبی (order isomorphism) گویند.مثلا مجموعه های خوش ترتیب {1و2و3} و{14و15و16} یکریخت ترتیبی هستند . یعنی اولین عضو در یک مجموعه برچسب 1 و در مجموعه دیگر برچسب 14 دارد وبه همین ترتیب دومین و سومین عضو .

اکنون می توان با این یکریختی رده های هم ارزی تعریف کرد.که در هر رده همه مجموعه های یکریخت ترتیبی قرار دارند.

اعداد اردینال

اولین تعریف عدد اردینال :یک عدد اردینال مجموعه خوشترتیبی است مثل a که هر عضو آن مثل x برابر با مجموعه عناصری از a باشد که از x کوچکترند.

اعداد اردینال در ریاضیات به زبانهای مختلفی تعریف شده اند،اکنون ما به بررسی مختصر ماهیت آن می پردازیم.

به زبان خیلی ساده اعداد اردینال رده های هم ارزی مجموعه های خوشترتیب را برچسب گذاری می کند.یا هر عدد اردینال یک نمایندهء از دسته هم ارزی مجموعه های خوشترتیب را مشخص می کند.

در حالت خیلی ساده مجموعه اعداد طبیعی را در نظر بگیرید ،زیر مجموعه های زیر را در نظر بگیرید

{},{0},{0,1},{0,1,2},.....

(که این زیر مجموعه ها در واقع نمایندهء مجموعه های مرتب متناهی هستند)

براى اين زير مجموعه اه دو نوع برچسب گذارى مى توانيم انجام دهيم

1. برچسب كاردينالى كه به هر مجموعه تعداد اعضا (بحث بر روى اندازه مجموعه(size)) را نسبت مى دهدمثال برچسب مجموعه {1و0} عدد 2 خواهد بود.

2. برچسب اردينالى كه به هر مجموعه برچسب ترتيب آن مجموعه(بحث روى موقعيت اعضا position) را مى زند ، توجه داريم كه اين مجموعه اه نمايندهر ده هاى ترتيبى مجموعه هاى مرتب متناهى هستند مثال مجموعه{2و1و0} نمايندهمه مجموعه هاى ترتيبى 3 عضوى است.البته در حالت متناهى اين دو نوع برچسب گذارى يكسان هستند(چون هر دو مجموعه ترتيبى متناهى با تعداد اعضاى يكسان يكريخت ترتيبى هستند). اما در حالت ان متناهى كامل متفاوتند .

خب پس تا اينجا اعداد اردينال متناهى به صورت زير تعريف شده اند(كه در اين حالت همان اعداد طبيعى هستند)

0,1,2,3,....

كه برچسب مجموعه هاى خوشترتيب و متناهى زير هستند:

{ } ,{0} ,{0,1} ,{0,1,2},.....

به طور مثال عدد اردينال 26 يعنى مجموعه خوشترتيب {25و.....و1و0}

پس براى مجموعه هاى مرتب متناهى كه اعداد اردينال (كه گاهى براى سادگى فقط مى گويند اردينال) چيز جديدى نيستند.اما در حالت انمتناهى وضع به كلى فرق ميكند به هر مجموعه انمتناهى تنها يك برچسب اندازه (كاردينال)دارد اما يك مجموعه خوش ترتيب انمتناهى مى تواند چند رده خوشترتيب غير يكريخت داشته باشد.

در واقع گسترش و توسيع برچسب اندازه براى مجموعه هاى انمتناهى منجر به تعريف كاردينال يك مجموعه و گسترش و توسيع برچسب ترتيب مجموعه هاى انمتناهى منجر به تعريف اردينال يك مجموعه مى شود.

مجموعه همه اعدادطبيعى {...و4و3و2و1و0} كه يك مجموعه انمتناهى و خوشترتيب است اولين عدد اردينال انمتناهى را مشخص ميكند كه آنرا با ? نمايش ميدهيم .

اعداد اردينال را ميتوان با هم جمع، ضرب يا به توان رساند، اما جمع و ضرب آنه لزوما خاصيت جابجايى ندارند يعنى مثل ? =1+? ولى اين اكيدا كوچكتر از ?+1 هست و ? برابر2ضربدر هستش.اما اكيدا كوچكترازاز?.2 هست (نحوه جمع و ضرب اين اعداد را مى توانيد در مراجع مشاهده كنيد).ودارىم

?={0,1,2, ...}

?+1={0,1,2,....,?

.....

كه عدداصلی همه مجموعه های اخير همان عدد اصلی اعداد طبيعی (الف نات)هستش و مجموعه همه اعداد اردينال شمارا را با
?1نشان می دهيم وعدد اصلی آن الف يك هست.و اين اولين عدد اردينال نامشماراست.

اكنون می توان اين مجموعه ها ور ادامه داد ومجموعه خوشترتيب اعداد اردينال مجموعه زير خواهد شد

1, 2, ...,ω, $\omega+1$,$\omega+2$, ..., $\omega+\omega$,$\omega+\omega+1$,....

مثال ? يعنی مجموعه همه اردينالهای متناهی و 3 يعنی برچسب همه3 عضوی های خوشترتيب والی آخر

بحث اردينالها يك بحث فوق العاده پركاردر نظريه مجموعه هاست كه تعريف های آن در رياضيات با ابزارهايی مثل توپولوژی ، نيز آمده است و من هرچه ميونيسم باز هم ميبينم قسمتهای زيادی برای گفتن ماندە برای مطالعه بيشتر به آدرسهای كه درپايان مطلب خواهم گذاشت می توانيد مراجعه كنيد.

در نهايت تعريف جان فون نويمان رياضيدان معاصر را از عدد اردينال ذكر ميكنيم كه می توانيد انطباق تعاريف بالا از عدد اردينال را با تعريف فون نويمان در مثال زير تعريف ببينيد.(زندگی با رياضيات، مقاله آشنايی با اعداد اوردينال)

در اين زمينه همچنين: Why is ? the smallest ??

بايد توجه داشت كه كانتور علاوەبر بيان مجموعه اعداد ترانفسينی، از مفهومی با عنوان نامتناهی مطلق ای absolute infinite با نماد حرف بزرگ امگا (?)ياد میكند كه بسط و توسعه مفهوم نامتناهی است و با مجموعه بینهایت امگا متفاوت است.((absolute infinite

[3] اومگا (بزرگ: ?، كوچک: ?; يونانی ?????) بيست و چهارمين حرف الفبای يونانی است. و در دستگاه شمارش يونانی مقدار ۸۰۰ را دارد. نام اين حرف به معنی اوی بزرگ است (? مگا، مگا به معنی بزرگ است)، كه در مقابل اميكرون است "little O" (به معنای اوی كوچک).

[4] جلسه شرح توحيد صدوق، تاريخ 26/9/1398.

[5] در نظريه مجموعه‌ها، استدلال قطری كانتور در سال ۱۸۹۱ توسط گئورگ كانتور به عنوان يک اثبات رياضی ارائه گرديد و نشان داد مجموعه‌های نامتناهی وجود دارند كه اعضای آن‌ها در تناظر يک به يک با مجموعه اعداد طبيعی نيستند. چنين مجموعه‌هايی را «مجموعه نامشمار» مينامند.

مجموعه غيرقابل شمارش

كانتور، در مقاله‌ی خود در سال ۱۸۹۱، مجموعه T را مطالعه كرد كه شامل همه دنباله‌های رقم‌های دودويی (يعنی هر رقم صفر يا يک) باشد. او با اثباتی ساختی از قضيه زير شروع میكند:

اگر s1, s2, ... , sn شامل تمامی شمارشهای ممكن از T باشد، آنگاه همواره عضوی از T وجود خواهد داشت كه در بين s1,S2,... نخواهد بود.

برای اثبات این، مجموعه‌هایی از T را به شکل زیر انتخاب می‌نماییم:

s1 = (۰, ۰, ۰, ۰, ۰, ۰, ۰, ...)
s2 = (۱, ۱, ۱, ۱, ۱, ۱, ۱, ...)
s3 = (۰, ۱, ۰, ۱, ۰, ۱, ۰, ...)
s4 = (۱, ۰, ۱, ۰, ۱, ۰, ۱, ...)
s5 = (۱, ۱, ۰, ۱, ۰, ۱, ۱, ...)
s6 = (۰, ۰, ۱, ۱, ۰, ۱, ۱, ...)
s7 = (۱, ۰, ۰, ۰, ۱, ۰, ۰, ...)
...

او ساختار توالی s را با انتخاب مکمل اولین رقم در s1 انتخاب نمود (جایگزینی صفر به جای یک و برعکس)، برای انتخاب دومین رقم S به سراغ رقم دوم در s2 رفت و مکمل آن را انتخاب نمود و به همین ترتیب ادامه داد. در مثال فوق به نتایج زیر می‌رسیم:

s1 = (۰, ۰, ۰, ۰, ۰, ۰, ۰, ...)
s2 = (۱, ۱, ۱, ۱, ۱, ۱, ۱, ...)
s3 = (۰, ۱, ۰, ۱, ۰, ۱, ۰, ...)
s4 = (۱, ۰, ۱, ۰, ۱, ۰, ۱, ...)
s5 = (۱, ۱, ۰, ۱, ۰, ۱, ۱, ...)
s6 = (۰, ۰, ۱, ۱, ۰, ۱, ۱, ...)
s7 = (۱, ۰, ۰, ۰, ۱, ۰, ۰, ...)
...
s = (۱, ۰, ۱, ۱, ۱, ۰, ۱, ...)

با ساخت s به روش فوق به مجموعه‌ای می‌رسیم که با تمامی مجموعه‌های بالا متفاوت است زیرا عنصر n ام آن با عنصر n ام تمام مجموعه‌های بالا تفاوت دارد.

بر اساس این قضیه کانتور با استفاده از یک اثبات با تناقض نشان می‌دهد که:

> مجموعه T غیرقابل شمارش است.

او برای اثبات تناقض در ابتدا فرض می‌کند T شمارا است. پس همه عناصر آن به شکل s1,s2,...sn قابل نمایش هستند. با اعمال قضیه قبلی به این شمارش‌ها به توالی s می‌رسیم که در شمارش‌ها موجود نیست. اما s عنصری از T بود و بنابراین باید در شمارش‌ها باشد. این تضاد فرض اصلی را زیر سؤال می‌برد بنابراین T غیرقابل شمارش است.(سایت ویکی پدیا) همچنین ملاحظه کنید: Universality and the Liar: An Essay on Truth and the Diagonal Argument

تصویر روشن‌تری از این برهان را در اینجا می‌توانید مشاهده کنید.

در زمینه کاربرد برهان قطری در مباحث حکمت نیز مطالعه مقاله «بررسی اهمیت فلسفی برهان قطری کانتور» سودمند است.

[6] این بخش از مقاله با خدایی گام به گام را در فصل دوم این نوشتار ملاحظه خواهید کرد.

[7] جلسه شرح توحید صدوق، تاریخ 26/9/1398

[8] سه فلسفه اصلی ای مکتب تفکر در رابطه با مبانی ریاضیات پیدا شده است به اصطلاح مکتب منطق گرا، مکتب شهودگرا و مکتب صوری گرا .طبیعی است که هر فلسفه نوین مبانی ریاضیات باید ، به نحوی، با بحران کنونی درمبانی ریاضیات مقابله کند . در بخش آتی به طور مختصر این سه مکتب فکری را مورد بررسی قرار داده و متذکر خواهیم شد که چگونه هر یک از اینها راه برای مواجهه با تعارضهای نظریه عام مجموعه ها در پیش پا می گذارد. (تاریخ ریاضیات، ج ۲، ص ۳۲۰)

[9] تز صوری گرا این است که ریاضیات با دستگاه های نمادی صوری سر و کار دارد. در واقع ریاضیات مجموعه ای از آن مباحث مجرد تلقی می شود که در آن اصطلاحات صرفا نمادهایی هستند و احکام قواعدی متضمن این نمادها. پایه غائی ریاضیات در منطق قرار ندارد و بلکه تنها در مجموعه ای نشانه ها و نمادهای پیش منطقی و در مجموعه ای از اعمال با این نشانه ها واقع است. چون از این دیدگاه، ریاضیات عاری از محتوای ملموس و تنها شامل عناصر نمادی آرمانی است، برقراری سازگاری شاخه های مختلف ریاضیات قسمت مهم و لازمی از برنامه صوری گرایی می شود. بدون همراهی چنین برهان سازگاری، تمام مبحث اساس بی معنی خواهد شد. در تز صوری گرایی اصل موضوعی ریاضیات در بیشترین حد دنبال می شود.

مکتب صوری گرایی توسط داوید هیلبرت بعد از اتمام کارش در بررسی اصل موضوعی هندسه تاسیس شد. در مبانی هندسه اش 1899 هیلبرت روش ریاضی را از قالب مبحث اصل موضوعیهای مادی اقلیدس به قالب دقیق تر مبحث اصل موضوعیهای صوری کنونی در آورده بود. دیدگاه صوری گرا بعدا برای مقابله با بحران ناشی از پارادوکسهای نظریه مجموعه ها و به مبارزه طلبیدن ریاضیات کلاسیک به دلیل انتقادهای شهودگرایانه، به وسیله هیلبرت ایجاد شد. گرچه هیلبرت پیش از سال 1904 اصطلاحات صوری گرایانه را به کار برده بود تا بعد از سال 1920 وی و همکارانش برنیس، آکرمان، فون نویمان، و دیگران کار جدی را درباره آنچه امروزه برنامه صوری گرا نامیده می شود آغاز نکردند.

 توفیق ای شکست برنامه هیلبرت برای نجات ریاضیات کلاسیک در گرو حل مسئله سازگاری است. بری بودن از تناقض تنها به کمک برهان های ناسازگاری تضمین می شود و برهان های ناسازگاری قدیمی تر مبتنی بر تعابیری و مدل هایی است که مسئله سازگاری را از یک حوزه ریاضیات به حوزه دیگر منتقل می کند. به عبارت دیگر یک برهان سازگاری به روش مدلها صرفا برهانی نسبی است. بدین جهت هیلبرت روش مستقیمی جدیدی برای مسئله سازگاری تدبیر کرد. بسیاری شبیه به اثبات انچه وضعیت هایی خاص در یک بازی بنابر قواعد آن نمی توانند در بازی پیش آیند هیلبرت امید آن را داشت تا به کمک مجموعه مناسبی از قواعد عمل برای به دست آوردن فرمول های قابل قبول از نمادهای اساسی ثابت کند که فرمول متناقضی هرگز پیش نمی آید. با نمادهای منطقی یک فرمول متناقض فرمولی که از نوع " F و نه F " است که در آن F فرمول پذیرفته شده ای از دستگاه است. اگر بتوان نشان داد که چنین فرمول متناقضی ممکن نیست آنگاه سازگاری دستگاه ثابت شده است.

 بسط افکار فوق برای آزمون مستقیم سازگاری دری ریاضیات توسط هیلبرت، نظریه برهان نامیده شد. برای دستگاه های مقدماتی معینی برهانی سازگاری فراهم شدند که آنچه را هیلبرت میل به انجام آن برای همه ریاضیات کلاسیک داشت نشان می دهد ولی در کل مسئله اساسازگاری برای دستگاه بدون چاره ماند.

در حقیقت برنامه هیلبرت حداقل به شکلی که در اصل در ذهن او بود ظاهرا محکوم به شکست بود این حقیقت توسط کورت گودل در سال 1931 عملا قبل از انتشار مبانی ریاضی، آشکار شد. گودل به کمک روش های بی اراده و قابل قبول برای پیروان هر یک از سه مکتب اصلی فلسفه ریاضیات نشان داد که برای دستگاه قیاسی که به حد کافی قوی شده باشد نظیر دستگاه هیلبرت برای همه ریاضیات کلاسیک اثبات سازگاری دستگاه به کمک روش های متعلق به خود آن دستگاه میسر نیست. این قضیه قابل توجه پیامد قضیه اساسی تری داشت گول ناکامل بودن دستگاه هیلبرت را ثابت کرد یعنی وی وجود مسائل "تصمیم ناپذیر" را در داخل دستگاه که سازگاری دستگاه از آن جمله است نشان داد. این قضایا نشان می دهند که دستگاه های ریاضی که برای استخراج ریاضیات متناسب شناخته شده اند قابل اطمینان نیستند بدین معنی که سازگاری آنها را نمیتوان با روش های متناهی داخل دستگاه قوی شده اند ثابت کرد و حال آنکه هر دستگاهی که از این لحاظ مطمئن تشخیص داده شده نامناسب است.(مقاله قوی گرایی در ریاضیات استفاده شده از مطالب کتاب تاریخ ریاضیات)

[10] پئانو نظریه ی اعداد طبیعی را اصل موضوعی ساخت و قدم اصلی را برای حسابیدن ریاضیات، یعنی تحویل ریاضیات به حساب، برداشت. وی سه مفهوم اولیه صفر، عدد و تالی را ارائه کرد (مقصود از عدد، عدد طبیعی و منظور از تالی، عدد بعدی در تربیت طبیعی بود، مثلاً یک تالی صفر است، دو تالی یک است و قس علی هذا). سپس پنج اصل موضوع زیر (موسوم به اصول پئانو) را وضع کرد:

الف) صفر یک عدد است.

ب) تالی هر عدد، یک عدد است.

ج) صفر تالی هیچ عددی نیست.

د) هیچ دو عدد متفاوتی دارای تالی برابر نیستند.

ه) هر خاصیتی که به صفر و به تالی هر عدد دارای آن خاصیت متعلق، باشد، به همه اعداد متعلق است (اصل استقرای ریاضی). به این ترتیب می توانیم رشته اعداد طبیعی را با شروع از صفر و گذر از یک عدد مانند n به تالی آن یعنی (s(n در دست داشته باشیم.

جمع به سادگی قابل تعریف است. در واقع به ازای هر m ، عدد 0+mرا برابر m قرار می دهیم و اگر m+n داده شده باشد،(m+s(nرا برابر تالی m+n یعنیs(m+n) تعریف می کنیم. ضرب نیز به طور مشابه تعریف می شود و به دنبال آن می توان همه قضایای حساب (مقدماتی) را اثبات نمود. کار پئانو ایراداتی داشت، از جمله این که دستگاه قیاسی وی قابلیت پذیرفتن تعدادی نامتناهی تعبیر را داشت. یک تعبیر این است که صفر را به معنی صد، عدد را به معنای اعداد طبیعی بزرگتر ای مساوی صد و تالی را به معنای معمولی آن می گیریم. در این صورت هر پنج اصل موضوع پئانو، احکام صادقی خواهند بود (توجه کنید که صد تالی دون و نه نیست زیرا در این الگو دون و نه عدد نیست!).

بر طبق نظر راسل، در دستگاه پئانو چیزی برای تمیز دادن الگوهای متفاوت وجود نداشت. ما می دانیم « صفر» چه باید باشد، به وژه نمی خواهیم به معنای صد باشد. دستگاهی که در آن صفر به معنای صد است به درد زندگی نمی خورد. می خواهیم اعدادمان چنان باشند که بتوانند برای شمارش اشیای معمولی به کار روند.

در 1884 فرگه به منطقی‌دن حساب، یعنی تقلیل حساب به منطق (و با توجه به کار پئانو، در واقع منطقی‌دن ریاضیات) همت گماشت و اولین مکتب ریاضی را به نام منطق گرایی، که به عقیده ی کواین یک رهیافت افلاطون گرایانه به ریاضیات بود، تأسیس کرد . هدف این مکتب تحویل ریاضیات به منطق بود، یعنی اثبات این که ریاضیات شاخه ای از منطق (جدید و نه سنتی) است.

به زعم فرگه عدد چیزی است که مشخصه اعداد است همان طور که انسان مشخصه انسان ها است. یک عدد خاص مانند 3 نمونه ای از عدد است و یک گروه سه نفری نمونه ای از عدد 3 است، و نه عدد. خود عدد 3 چیزی است که بین همه ی گرد آیه های سه عضوی مشترک است. فرگه صفر را گرد آیه ی متشکل از مجموعه ی تهی، 1 را گرد آیه ی متشکل از همه مجموعه های تک عضوی، 2 را گرد آیه متشکل از همه ی مجموعه های دو عضوی و ...تعریف کرد.

با این حال همه ی این ها، توسط راسل دوباره کشف شد. در واقع منطق گرایی در حدود 1910 توسط راسل و وایتهد تنقیح شد. این دو نفر سعی کردند نشان دهند تمام ریاضیات کلاسیک که تا آن زمان شناخته شده بود از نظریه ی مجموعه ها و این نظریه در جای خود از اصول موضوع مذکور در کتاب اصول ریاضیات آن ها مشتق می شود و بالاخره که این اصول موضوع متعلق به منطق هستند.

آن ها در ارائه ی منطق گرایی نظریه ی انواع و اصل تقلیل پذیری را به کار بردند. اما برنامه ی آن ها ناقص بود، زیرا مثلاً این اصل موضوع که مجموعه های نامتناهی وجود دارند یک حکم منطقی (یعنی حکمی با عمومیت کامل که صدقش در پرتو صورتش باشد نه محتوایش) نبود. در واقع پذیرش این اصل به خاطر آشنایی ما با مجموعه های نامتناهی مانند مجموعه اعداد طبیعی یا مجموعه نقاط فضای سه بعدی بود، یعنی بر مبنای مضمون این اصل، نه صورت آن. همین وضعیت در مورد اصل انتخاب نیز برقرار بود. مشکل دیگر این بود که فرآیند استخراج قضایا از اصول منطق، طویل، پیچیده و ملال آور بود و با دید شهودی ما از ریاضیات منطبق نبود. به این ترتیب، منطق گرایی در ارائه قواعد و اصول زیر بنایی ریاضی شکست خورد.(سایت راسخون، مقاله منطق گرایی در ریاضیات)

[11] تز شهودگرا آن است که ریاضیات باید منحصراً به توسط يك عده تناهی از روشهای سازنده درباره دنباله اعداد طبیعی که به طور شهودی در نظر گرفته شده اند بنا شود. لذا مطابق این نظر در زیربنای ریاضیات شهود اولیه ای قرار دارد که بدون تردید با حس گذرایی قبل و بعد در وجود ما همراه است و به ما اجازه می دهد يك چیز واحد، سپس یکی دیگر سپس یکی دیگر و همینطور ات به طور بی پایان را تصور کنیم. بدین ترتیب دنباله های بی انتها را به دست می آوریم که معروفترین آنها دستگاه اعداد طبیعی است. از این مبنای شهودی دنباله اعداد طبیعی هر شی ریاضی دیگر را باید به يك روال سازنده بنا کرد و در آن تعدادی متناهی از مراحل ای اعمال را به کار برد در تز شهود گرا بسط ریاضیات از لحاظ تکوینی تا سر حد امکان دنبال می شود.

مکتب شهودگرا (به عنوان يك مكتب (در حدود سال ۱۹۰۸ به توسط ریاضیدان هلندی ل . ا . ی . بر اوئر آغاز شد ولی برخی مفاهیم شهودگرایانه قبلا توسط کسانی چون کرونکر در سالهای (۱۸۸۵) و پوانکاره (۱۹۰۲ - ۱۹۰۶) ابراز شده بود. این مکتب با گذشت زمان تدریجاً تقویت شده، برخی از ریاضیدانان برجسته کنونی را به خود جلب کرده و تأثیر فوق العاده ای در تمام افکار مربوط به مبانی ریاضیات گذاشته است.

برخی از پیامدهای تز شهودگرا جنبه انقلابی دارند. مثلاً پافشاری بر روشهای سازنده به تصوری از وجود در ریاضیات منجر میشود که آن چیزی نیست که همه ریاضیدانان به آن اعتقاد داشته باشند برای شهودگرایان ، **هستیی که اثبات وجود آن لازم است باید در تعدادی**

مراحل متناهی ساختنی باشد کافی نیست که فرض عدم وجود آن هستی منجر به تناقض شود. این بدان معنی است که بسیاری از براهین وجودی زیادی که در ریاضیات کنونی دیده میشوند برای شهودگرایان قابل قبول نیستند.

مورد مهمی از پافشاری شهودگرایان بر روشهای سازنده نظریه مجموعه هاست. از نظر شهودگرايان يك مجموعه را نمی توان به عنوان گردایه ساخته و پرداخته ای تصور کرد بلکه باید آن را به عنوان قانونی تلقی کرد که به کمک آن عناصر مجموعه را بتوان به يك روال قدم به قدم بنا کرد. این مفهوم مجموعه امکان وجود مجموعه های تناقض آمیزی مانند مجموعه همه مجموعه ها » را رد می کند. (تاریخ ریاضیات، ج ۲، ص ۳۲۴)

در این زمینه همچنین مراجعه کنید به سایت بریتانیکا: مقاله Logicism, intuitionism, and formalism

[12] جلسه سوم تاریخ اجمالی ریاضیات؛ بحرانها و مسائل

بازبینی #3
ایجاد شده 18 ژانویه 2025 06:32:55 توسط khoddami
به روزرسانی شده 9 ژوئن 2025 09:48:27 توسط khoddami