مقدمه: بحران‌های ریاضی؛ معضلات ریاضی

[1]یکی از بحران هایی که در فضای ریاضیات در قرن بیستم پیش آمد، پیدا شدن نظریه مجموعه‌ها[2] و به تبع آن بحران هایی بود که در این نظریه پیدا شد[3]

۱. معضلات ریاضی

(بحران غیر از «مسائل حل نشده» و مسائل مشکل است؛ یعنی چیزی که اساس علم را به هم می‌ریخت؛ یکی همان قضیه فیثاغورث است که خطا قطر مثلث با ضلع مبایین است و به یک عدد گنگ می‌رسیم. مهمترین مفهوم حساب تناسب بود و با یک زحمتی با این بحران مواجه شدند.)

[شیخ بهایی در کتاب خلاصه الحسابشان یک خاتمه ای دارند خیلی جالب:

> قد وقع للحكماء الراسخين في هذا الفن مسائل صرفوا في حلّها افكارهم و وجّهوا الي استخراجها انظارهم و توصّلوا الي كشف نقابها بكل حيلة و توسّلوا الي رفع حجابها بكل وسيلة فما استطاعوا اليها سبيلا و لا وجدوا عليها مرشدا و دليلا فهي باقية علي عدم الإنحلال من قديم الزمان و مستصعبة علي سائر الاذهان الي هذا الآن، و قد ذكر علماء هذا الفنّ بعضها في مصنّفاتهم و أوردوا شطراً منها في مؤلّفاتهم تحقيقاً لإشتمال هذا الفن علي المستصعبات الآبيات و إقحاماً لمن يدّعي عدم العجز في الحسابيات و تحذيراً للمحاسبين من التزام الجواب عمّا يورد عليهم منها و حثاً لأصحاب الطباع الوقادة علي حلّها و الكشف عنها، و أنا أورد في هذه الرّسالة سبعة منها علي سبيل الأنموزج اقتداءً بمنارهم و اقتفاءً لآثارهم، و هي هذه:
>
> الأولى: عشرة مقسومة بقسمين إذا زيد علي كلّ جزء و ضرب المجتمع في المجتمع حصل عدد مفروض.

> الثانية: مجزوإن زدنا عليه عشرة كان المجتمع جذرا و نقصناها منه كان للباقي جذراً.
>
> الثالثة:أقرّلزيد بعشرة الا جذر ما لعمرو و لعمرو بخمسة الاّجذر ما لزيد.
>
> الرابعة:عدد مكعّب قسم بقسمين مكعّبين.
>
> الخامسة:عشرة مقسومة بقسمين اذا قسمنا كل منهما علي الآخر و جمعنا لخارجين كان المجتمع مساويا لاحد قسمي العشرة.
>
> السّادسة: ثلاث مربّعات متناسبة مجموعها مربّع.
>
> السّابعة: مجذور اذا زيد عليه جذره و درهمان أو نقص منه جذره و درهمان كان المجتمع او الباقي جذر هذا.»

...ابتدای خاتمه می‌فرمایند: فرق معضل با بحران چیست؟ ...می گوید:«**خاتمه قد وقع للحكماء الراسخين في هذا الفن مسائل**»زیر کلمه مسائل خط بکشید. امروز می‌گویند:«problems» خود عرب ها می گویند مسئلة و مسائل. مرحوم شیخ همه مسائل تعبیری کردند، لذا می گویند که:«ا**ن اورد في هذه الرسالة سبعة منها**».

لغت problems که در دارنگلیسی به کار می برند صرفا به معنای مسئله نیست که ما در فارسی می گوییم.مسئله در فارسی گاهی یک بار مشکلی در آن هست. معضلی که می‌رداماد به کار بردند، خیلی قشنگ است[4].پیشنهاد من این است که problems را که این ها ترجمه می کنند بگویند: معضلات نه مسائل. بله ما مسئله را در فارسی به معنای چیز مشکل هم به کار می بریم.می گوییم این جا برای ما یک مسئله شده است.حتی به معنای بحران و معضل به کار می بریم.اما خود کلمه فی حد نفسه در ابتدا در بدوش شامل آن معنای مشکل نیست.تعجب است که عرب ها همه همین طور می‌گویند: مسائل، مسائل هیلبرت مثلاً، مسائل اسمیل،مسائل الالفیه.[5]

«**قد وقع للحكماء الراسخين مسائل**»حکمای راسخین در ریاضیات معضلاتی برایشان پیش آمده«**صرفوا في حلّها افكارهم و وجّهوا الي استخراجها انظارهم و توصّلوا الي كشف نقابها بكل حيلة و توسّلوا الي رفع حجابها بكل وسيلة فما استطاعوا اليها سبيلا**»خودشان را کشته اند.تعبیر خودکشی را حاج آقای حسن زاده زیاد به کار می بردند.خودکشی می کردند در این ها ولی نتوانستند حل کنند:«**و لا وجدوا عليها مرشدا و دليلا و هي باقية علي عدم الإنحلال من قديم الزمان** »از قدیم این ها مانده حل نشده است«**و مستصعبة علي سائر الاذهان الي هذا الآن**»تا این جا که من این را برایتان می نوشتم مستصعب است نتوانستند حل کنند.«**و قد ذكر علماء هذا الفنّ بعضها في مصنّفاتهم و أوردوا شطراً منها في مؤلّفاتهم تحقيقاً لإشتمال هذا الفن علي المستصعبات الآيات و إقحاماً لمن يدّعي عدم العجز في الحسابيات**»خیلی قشنگ است.بعضی می گویند در حساب که دیگر عجز معنا ندارد برو جلو.می گویند نه این ها را آوردند که چرا عجز نیست در حسابیات؟ همه عجز است، درنگ است، در جازدن است، معضل است. پیش می آید « **و تحيّراً**

للمحاسبين من التزام الجواب...»می گویند زود خیالتان نرسد به جواب رسیده اید.خودکشی کردندو جوابش را نیافتند.شما یک وقت غره نشوید لذا بعد می‌گویند:من هفت تا از آن معضلات را در این جا می آورم به عنوان خاتمه کتاب خودم.

پس در یک کلمه، شیخ بهایی هفت تا مسائل ریاضی را مطرح کردند.مسئله یعنی چه؟مسئله، نه یعنی مسئله. مسئله یعنیproblem، یعنی مشکل و معضلی آوردند که این ها حل نشده است. جالب است! ایشان هفت تا انتخاب کردند در زمان ما هم در سال 2000 برای هفت معضل ریاضی جایزه تعیین کردند.**Millennium Prize Problems**

... هفت تاست که یکیش حل شده است. کسی که حل کرد جایزه را نگرفت این طور در نظرم هست [6].

.. شیخ فرمودند. ببینید خلاصه الحساب ما یک نمایندهٔ است برای این که ختم کرده است خلاصه الحساب را با شکستن غرور ریاضی.ریاضیات خیلی عالی است، اما غرور آور نباید باشد.باید عملاً ببینید که معضلاتی داریم که خودکشی کردند و حل نشده است.حالا ببینید تا چه زمانی حل بشود یا نشود.

در ابتدای قرن بیستم هم هیلبرت 22 تا مسئله ریاضی مطرح کرد[7] :Hilbert's problems.طی قرن بیستم این ها مطرح بود.این اواخر هم اسمیل سیزده چاردهٔ معضل مطرح کرد که آن ها هم چندتایش حل شده است[8].منظور این است که این ها را می گوییم معضلات.

۲. بحران های ریاضی

اما بحران چیست؟crisis .عرب ها می گویند ازمهٔ. «ازمهٔ الریاضیات». «الازمات الثلاثة». «الازمات فی الریاضیات». معضل یک امر مشکلی است، اما دم و دستگاه را به هم نمی ریزد.مثالی که می توانم خدمتتان عرض کنم مثل یک کشتی است.می آیند می گویند الان معضلی شده است فلان شیر فلان مخزن باز نمی شود.کارمان گیر است.شیر باز نمی شود.این را می گوییم معضلی است برای کشتی، ولی بحران نیست.

بحران وقتی است که توفانی می شود که الان کشتی با همه چیزش می رود زیر آب.این می شود بحران. این خیلی تفاوت دارد با معضلات و مسائلی که باید حل شود.زمان مرحوم شیخ معضلاتی بوده که به یک نحوهایی حل شده بود.بحران هایی هم بوده که حل شده بود.زمان ایشان بحران خیلی نمودداری نبوده که بفرمایند.

در این کتاب تاریخ ریاضیات که مال هاوارد است-دو جلد است و به فارسی هم ترجمه شده است[9]- ایشان می گوید بحران های ریاضی در طول تاریخ ریاضیات سه تا بوده است.

یکی بحران کشف اعداد گنگ[10]،

دومی بحران کشف حساب جامعه و فاضله مشتق و انتگرال[11]،

سومی هم بحران نظریه مجموعه ها در قرن بیستم[12]،

من در ذهنم هست که شاید منظورش، بحران در ریاضیات مطلق بوده است و الا کشف هندسه های نااقلیدسی در این اواخر هم خودش یک بحران بود. اصلاً شرایطی رسیده بود که بعضی از هندسه دان ها ریاضی دان می گفتند ای کاش ما وارد نشده بودیم[13].یعنی این قدر تحت فشار مطالب عصبی بودند. کل هندسه به هم می ریخت و ریخت.فلذا آلآن هندسه های اقلیدسی و نااقلیدسی کنار همند .خیلی مهم است که سلطان مقتدری را که بر تخت امپراتوری کل هندسه نشسته- هندسه اقلیدسی -بخواهند از تخت پایین بکشند و بشوند در ردیف یکی دیگر از آن هندسه ها.خیلی کار می برد. خودش بحران است، ولی ایشان در کتاب تاریخ ریاضیات هندسه های نااقلیدسی را توضیح داده است، اما به عنوان بحران از آن نام نبرده است[14][15].]

این ها از یک بحران علمی در ریاضیات خواستند سوء استفاده کنند.اصل مطلب آن هایک مطلب ریاضی است که هیچ ربطی به خدا ندارد و جالب این است که خود کانتور که اول بار به این پارادوکس توجه پیدا کرد موحّد بود[16] و راسل که پارادوکس بعدی را که قوی تر است یافت، شکّاک بود؛ اما شخصی به نام گریم[17] مدعی شده که این برهانی بر عدم خداست و ظاهرا نزد آتئیستهای مثبتگرا[18] این از مهمترین برهان ها قلمداد میشود که خواهیم دید کاملا مبتنی بر یک خلط مبحث است.

خلاصه استدلال آن ها این است که ما بینهایت عدد داریم؛ و هر عددی با عدد دیگر یک رابطه دارد؛ پس بینهایت رابطه میشود که هر رابطه‌ای، یک حقیقت است متمایز از حقیقت دیگر. وقتی با حقایق متمایز روبرو شدیم، پس میتوانیم مجموعه‌ای از حقایق داشته باشیم؛ آنگاه سراغ نظریه مجموعه‌ها میرویم و این حقایق را در بزرگ ترین مجموعه، که مجموعه همه حقایق است قرار میدهیم. و میدانیم مجموعه‌ی همه حقایق، ناممتناهی است. تا اینجا بحث، ریاضی بود. بعد میگویند در ریاضیات اثبات شده که چنین مجموعه‌ای (مجموعه همه حقایق) پارادوکسیکال است؛ پس نمیتواند وجود داشته باشد؛ پس کسی هم که بخواهد علم به آن داشته باشد وجود ندارد.

قضیه کانتور

اما چرا مجموعه‌ی همه حقایق، پارادوکسیکال است؟ کانتور که موسس نظریه مجموعه‌ها بود خودش متوجه مشکلی شد و آن در خصوص «مجموعه همه مجموعه‌ها» بود. هر مجموعه‌ای رابطه‌ای با زیرمجموعه‌هایش دارد که تعداد زیر مجموعه‌ها بزرگتر از تعداد اعضای اصلی خود مجموعه است. مثلا مجموعه {زید ، عمرو} را در نظر بگیرید. این مجموعه چند زیرمجموعه دارد: {زید}، {عمرو}،{} (= مجموعه تهی)، {زید، عمرو}. یعنی واضح است که عدد اصلی هر مجموعه (در اینجا: 2) کمتر از تعداد زیر مجموعه‌هایش (در اینجا: 4) است.

حال «مجموعه همه مجموعه‌ها» را در نظر بگیرید. این مجموعه، اگرچه بینهایت است اما در همان بینهایتهایش یک عدد اصلی دارد و طبق استدلال فوق، تعداد زیر مجموعه‌هایش بیشتر از این عدد میشود. پس مجموعه‌ای که شامل این زیر مجموعه‌ها شود، مجموعه همه مجموعه‌هاست، نه آن که ما ابتدا فرض گرفته بودیم. دوباره نقل کلام به این مجموعه میکنیم و این راه هیچگاه متوقف نمیشود؛ پس مجموعه همه مجموعه‌ها نمیتواند وجود داشته باشد[19].

پارادوکس راسل

بعدها راسل پاراداکس دیگری یافت که از این قوی تر است[20]. میدانیم که مجموعه‌ها دو قسمند: مجموعه‌هایی که عضو خودشان نیستند (مثل مجموعه صندلیهای این اتاق) و مجموعه‌هایی که عضو خودشان هستند (مثل مجموعه مفاهیم کلی).

وی دسته اول را مجموعه‌های طبیعی نامید. حال بحث در مجموعه‌ی مجموعه‌های طبیعی است که آیا عضو خودش هست یا نیست؟ اگر عضو خودش باشد، پس عضو خودش نیست و اگر عضو خودش نباشد پس عضو خودش است و این پاراداکس است.

---

[1] مطالب اصلی این فصل، تقریری مباحثی است که با عنوان شرح مقاله با خدایی گام به گام در ضمن جلسات اصول سال ۱۳۹۲-۱۳۹۳ (در روزهای چهارشنبه)و در تاریخ ۱۰/ ۲/ ۱۳۹۳ و ۱۷/ ۲/ ۱۳۹۳ و ۳۱/ ۲/ ۱۳۹۳ صورت گرفته است. علاوه‌بر متن اصلی، از بخشی از افادات موجود در جلسات حکمت و عرفان شیعی بهره بردهایم که با کروشه متمایز شده است.

[2] نظریه مجموعه‌ها به انگلیسی: (Set theory) شاخه‌ای از منطق ریاضی است که به مطالعه مجموعه‌ها می‌پردازد. مجموعه‌ها، گردایه‌ای از اشیاء هستند. هر چند هر نوعی از اشیاء می‌توانند یک مجموعه را تشکیل دهند، اما نظریه مجموعه‌ها اغلب در مورد اشیاء مرتبط با ریاضی به کار می‌رود. زبان نظریه مجموعه‌ها را می‌توان در تعریف تقریباً همه اشیاء ریاضی به کار برد. مطالعه جدی بر روی نظریه مجموعه‌ها توسط گئورگ کانتور و ریچارد دِدکیند در دهه ۷۰ قرن ۱۸ میلادی شروع شد. بعد از کشف تناقض‌های نظریه طبیعی مجموعه‌ها، دستگاه‌های اصل موضوعی بیشماری در اوایل قرن ۲۰ مطرح شدند که معروفترین آنها اصل موضوعه زرملو-فرانکل و اصل موضوعه انتخاب هستند.

[3] در زمینه بحرانهای ریاضیات مراجعه کنید به : چند جلسه اجمالی در مورد تاریخ ریاضیات، بحرانها و مسائل

[4] ایشان کتابی با نام الاعضالات دارند و در آن به بررسی معضلات علوم مختلف از جمله ریاضیات، کلام و فقه پرداخته‌اند که از این میان شش معضل اول مربوط به ریاضیات است. کتاب اینگونه آغاز می‌شود: بسم اللّه الرحمن الرحيم و الاعتصام بالعزيز العليم بعد الحمد للّه و الصلاة على عباده المصطفين. فيا ولدي الروحانيّ و يا حبيبي العقلانيّ، يا شرف آل خاتون، و يا من هو بقريحته الشاهقة الملكوتيّة لكلّ علم غامض قانون. رقاك اللّه إلى قصيا المعارج في النشأتين، و لقّاك نضرة العيش على قصوى المدارج في العالمين. أقرّ اللّه أعيننا بمشاهدة جمالك، و سقانا كأسا دهاقا من رحيق وصالك.

لا تلهينّ سرّك اللطيف عن التدبّر في هذه الإعضالات العويصة التي كسائر نظائرها من العويصات الداهية السآجية و المعضلات السآحية السآطية في فنون العلوم و أفانين الصنّاعات، كان فلّ وفدتها و حلّ عقدتها أمرا مرهونا في الأعصار و الدهور بزمنان و شيئا مضمونا للأفهام و العقول من قبلنا. و اللّه سبحانه قد يسّرنا للفصية عنها و القول الفصل فيها بجميل منّه و إكرامه و جزيل فضله و إنعامه. ذلك فضل اللّه يؤتيه من يشاء، و اللّه ذو الفضل العظيم.

الإعضال الأوّل (زاوية حدبة الدائرة و الخط المماسّ إيّاها)

قد برهن أقليدس في خامس عشر ثالثة «الأصول» على أنّ زاوية حدبة الدائرة و الخطّ المماسّ إيّاها أصغر من كلّ حادّة مستقيمة الخطين.(مصنفات میر دامد، النص، ص: 267)

[5] با توجه به کاربردهای مختلف کلمه problem به نظر می‌رسد که لااقل از دو عبارت برای ترجمه این کلمه در زبان فارسی ای سایر زبان‌ها بهره برد: مسئله و معضل. در مورد مسائل جهان واقعی(real-world problems) تعبیر مسئله، مناسب است درحالی‌که در مسائل انتزاعی‌تر مانند مسائل هیلبرت و اسمیل باید از واژه معضل استفاده کرد.

[6] گریگوری ایکوولویچ پرلمان (روسی: ???????? ????????? ?????????؛ IPA: [?r????or??j ?jakəvl??v??t? p??r??l??man] زاده ۱۳ ژوئن ۱۹۶۶) ریاضیدان اهل روسیه است که به دلیل مشارکت در تجزیه و تحلیل هندسه ریمانی و توپولوژی هندسی شناخته شده‌است. او به‌طور گسترده به عنوان یکی از بزرگترین ریاضیدانان زنده شناخته می‌شود.

وی به دلیل اثبات حدس پوانکاره، مسئله‌ای که یک قرن ذهن بسیاری از ریاضیدانان را به خود مشغول کرده بود، در سال ۲۰۰۶ برنده مدال فیلدز شد که عالی‌ترین جایزه در زمینهٔ ریاضیات است. این نان‌بغه بزرگترین افتخار دنیای ریاضی جهان را کسب کرد اما از پذیرش این جایزه سر باز زد و گفت «من به پول یا شهرت علاقه‌ای ندارم؛ نمی‌خواهم مثل یک حیوان در باغ وحش به نمایش گذاشته شوم.» در ۲۲ دسامبر ۲۰۰۶، مجله علمی ساینس اثبات حدس پوانکاره را به عنوان تحول علمی سال به رسمیت شناخت. این نخستین باری بود که چنین تحولی در زمینه ریاضی رخ می‌داد

جان بال، رئیس مرکز جهانی ریاضیدانان، گفت که وی شخصاً از پرلمان خواسته بود تا این جایزه را ببرد، اما پرلمان به او گفته که از آنجایی که خودش را جزو جامعه ریاضیدانان جهانی نمی‌داند و احساس تکافتادگی می‌کند این جایزه را نمی‌پذیرد.

آقای پرلمان به خبرنگار یکی از روزنامه‌های بریتانیا دربارهٔ علت نپذیرفتن جایزه مؤسسه کلی گفت: «من همه آنچه را که می‌خواهم، در اختیار دارم.»

او برنده جایزه نقدی به ارزش یک میلیون دلار هم شده بود، که این جایزه بخاطر تئوری آقای پرلمان در مورد فضای چند بعدی به او تعلق یافت؛ اما او این جایزه را هم نپذیرفت.

آقای پرلمان برنده المپیاد ریاضی تمام روسی بوده و همچنین مشارکت‌های تحول‌سازی در هندسه ریمانی و توپولوژی هندسی داشته‌است.

در سال ۲۰۱۰ اعلام شد که ایشان به دلیل اثبات حدس پوانکاره حایز معیارهای لازم برای دریافت نخستین جایزه هزاره کلی است. در ۱ ژوئیه ۲۰۱۰ آقای پرلمان این جایزه را در کرد و تصمیم هیئت داوران و جایزه را بسیار غیرمنصفانه دانست و گفت مشارکتش در حل فرض پوانکاره از ریچراد همیلتون بیشتر نبوده‌است. ایشان همچنین جایزه معتبر جامعه ریاضی اروپا را در کرد.(سایت ویکی پدیا)

[7] در سال ۱۹۰۰ میلادی دیوید هیلبرت (۱۸۶۲- ۱۹۴۳م) در دومین کنگره بین المللی ریاضی دانان در پاریس در یک سخنرانی از مسائل ریاضیات سخن گفت و پس از آن هرمن ویل (Herman Weyl) درباره آن مسائل چنین گفت: «هرکس این مسائل را حل کند به کلاس افتخاری ریاضیدانان وارد

می شود.» در همین سال هیلبرت به یکی ریاضیدان برجسته در آلمان تبدیل شد. او به خاطر حل مسائل اساسی در نظریه ی پایایی و گزارش مهم در نظریه اعداد که در سال ۱۸۹۶ به چاپ رسید مشهور شد. در سال ۱۸۹۹ به درخواست کلاین (Klein) او کتاب مبانی هندسه را برای تجلیل از مقام گائوس (Gauss) و وبر (Weber) در گوتینگن به چاپ رساند. هورویتز (Hurwitz) در همه ای به هیلبرت درباره ی این کتاب نوشت: «شما با نوشتن این کتاب کوچک زمینه ی شگرفی از تحقیقات را باز کردی که می توان آن را ریاضیات اصل موضوعه نامید که بسیار فراتر از قلمرو هندسه است. او طی این سخنرانی ۲۳ مسئله در رابطه با ریاضیات را عنوان نمود که عناوین آن به شرح زیر هستند:

۱- ????? ?????? ???? ??? ???????? ???????

۲- ??????? ???? ?????? ? ????

۳- ????? ??? ?? ??? ???? ?? ????? ????? ? ?????? ?????

۴- ????? ?? ?????? ?? ????????? ????? ??? ?? ????

۵- ????? ?? (Lie) ?? ???? ??? ?????? ?? ??????? ???? ??? ???? ????? ????? ????? ????? ? ???? ??

۶- ????? ?????? ??? ?????? ??????? ???? ?????

۷- ??? ? ?????? ???? ?????? ????

۸- ????? ????? ???? ????? ????? ??? ? ????? ? ?????

۹- ????? ??? ???? ??? ????? ?? ?? ?????

۱۰- ??? ?? ???????? ???? ????? ?? ????? ??????? ???????? ???? ????.

۱۱- ????? ? ?? ????? ???? ??? ??? ???? ??? ?? ????? ???? ????

۱۲- ????? ???? ? ?????? ???? ????? ??? ???? ?? ?? ?????? ???? ????

۱۳- ?????? ???? ?? ??????? ??? ???? ? ???? ?????? ???? ?? ?? ?????

۱۴- ????? ?????? ???? ????????? ???? ? ???? ?? ?????

۱۵- ????? ? ????? ???? ?? ???? ????? ????? (Schubert)

۱۶- ????? ???????? ????? ?? ? ???? ??? ???? ? ????? ????? ???? ????? ???? ??? ??? ????????? ??? ???? ?? ?? ????

۱۷- ????? ??? ??? ???? ???? ???? ?????

۱۸- ????? ?????? ??????? ?? ????? ?????? ??????? ??? ????

۱۹- ??? ???? ??? ????? ???? ?? ???? ??????? ?????? ?????? ????

۲۰- ????? ? ?? ????? ? ??? ???? ????? ??? ????

۲۱- ????? ???? ??????? ????????? ??? ?? ???? ????????? ?? ??? ????? ???

۲۲- ??????? ???? ????? ?????? ???? ????? ?????????

۲۳- ????? ? ????? ??? ??? ???? ???????.

(سایت آی هوش)

[8] مسائل اسمیل (به انگلیسی: Smale's problems) فهرستی از هجده مسئله حل نشده ریاضی در سال ۱۹۹۸ است که توسط استیو اسمیل در همین سال انتشار یافت و در ۱۹۹۹ بازنشر شد. اسمیل این فهرست را در پاسخ به درخواست ولادیمیر آرنولد که در آن زمان معاون مدیر کل اتحادیه جهانی ریاضیات بود، تدوین کرد. آرنولد از گروهی از ریاضیدانان خواسته بود تا فهرستی از مسائل ریاضی برای قرن بیست و یکم پیشنهاد دهند. الهام بخش او در طرح این خواسته، فهرست مسائل هیلبرت بود که در اوائل قرن بیستم توسط ریاضیدان نامی، هیلبرت، پیشنهاد شده بود.

از میان این مسائل، تا کنون بعضی به صورت جزئی پاسخ داده شده اند. علاوه بر این، تا سال ۲۰۱۶ نیز سه مسئله به صورت کامل حل شده است. این سه مسئله شامل حدس پوانکاره (مسئله شماره ۲ در فهرست اسمیل) حل شده توسط گریگوری پرلمان در سال ۲۰۰۳، مرکز سازهای دفیموفیسمها (مسئله شماره ۱۲) حل شده توسط امی ویلکینسون در سال ۲۰۰۹ و سیستم لورنز (مسئله شماره ۱۴) حل شده توسط واروی توکر در سال ۲۰۰۲ است.(سایتویکی پدیا)

[9] ترجمه دکتر محمدقاسم وحیدی اصل

[10] مراجعه کنید به جلسات فقه هوش مصنوعی، جلسه ۸، مبحث فیزیکی و ذهنی نبودن عدد پی و جلسه دوم و سوم تاریخ اجمالی ریاضیات: مسائل و بحرانها

[11] جلسه پنجم آشنایی اجمالی با تاریخ ریاضیات: مسائل و بحران ها

[12] از مطالعه تاریخ ریاضیات از عهد یونان باستان تا زمان حاضر آشکار میشود که مبانی ریاضیات، سه بحران تکان دهنده را پشت سر گذاشته است که در آنها، در هر مورد، بخش وسیع از ریاضیات که تا آن زمان استوار به نظر می رسیده در معرض تردید قرار گرفته و به تجدید نظر فوری نیاز پیدا کرده است.

نخستین بحران در مبانی ریاضیات در قرن پنجم ق. م پیش آمد و در واقع چنین بحرانی نمی توانست پیشتر از آن رخ دهد زیرا ، همچنانکه دیده ایم ، ریاضیات به عنوان يك علم قیاسی زودتر از قرن ششم ق.م. شاید به توسط تالس فیثاغورس و شاگردان آنها شروع نشده بود. این بحران با کشف ان منتظر این مطلب که همه کمیتهای هندسی همجنس با یکدیگر متوافق نیستند به جلو انداخته شد؛ مثلا نشان داده شد که قطر و ضلع يك مربع هیچ مقیاس مشترکی ندارند. چون بسط فیثاغورسی کمیتها بر این اعتقاد راسخ شوندی که همه کمیتهای همجنس متوافق اند بنا شده بود؛ این کشف که کمیتهای همجنس، ناموافق هم می توانند باشند بسیاری مخرب از کار در

آمد به عنوان مثال كل نظريه فيثاغورسي تناسب با همه تبعات آن می بایست به دلیل سست بنیادی به کناری گذاشته می شد. رفع این نخستین بحران در مبانی ریاضیات نه به سادگی و نه به سرعت میسر بود. این مقصود سرانجام در حدود سال ۳۷۵ ق.م. توسط ائودوكسوس زيرك حاصل شد که نظریه تجدید نظر یافته او در باره كميتها و تناسب یکی از بزرگترین شاهکارهای همه اعصار است. بررسی قابل توجه ائودوکسوس از ناموافقها را می‌توان در مقاله پنجم اصول اقلیدس یافت؛ مطالعه وی اساساً با شرح جدیدی که توسط ریشارد در کیندر در سال ۱۸۷۲ از اعداد گویا داده شد، انطباق دارد. ما این نخستین بحران در مبانی ریاضیات را در بخش ۳-۵ و چگونگی رفع آن را توسط ائودوکسوس در بخش ۵-۵ دیده ایم این امکان کامل موجود است که بحران مزبور عمدتاً بارث فرمولبندی و پذیرش روش اصل موضوعی در ریاضیات پیدا شده باشد.

دومین بحران در مبانی ریاضیات پس از کشف حسابان توسط نیوتن و الیبنیتز در اواخر قرن هفدهم پیش آمد. دیدیم که چگونه جانشینان این دو تن سرمست از قدرت و کارپذیری این ابزار جدید از استحکام به قدر کفایت پایه ای که این موضوع بر آن بنا شده بود غافل ماندند، به طوری که به جای داشتن براهینی که نتایج را موجه نماید نتایج را برای توجیه براهینی به کار گرفتند. با گذشت زمان تناقضها و پارادوکسهای روز افزون پیش آمد و بحرانی جدی در مبانی ریاضیات آشکار گردید. این نکته بیشتر و بیشتر تشخیص داده شد که بنای آنالیز خانه ای به روی شن است و سرانجام در اوایل قرن نوزدهم کوشی اولین گامها را در جهت حل این بحران با گذاشتن روش دقیق حدود به جای روش مبهم بینهایت کوچکها، برداشت با به اصطلاح حسابیدن آنالیز که توسط وایرشتراس و پیروانش در قدم بعد انجام شد. این احساس به وجود آمد که بر دومین بحران در مبانی آنالیز غلبه حاصل شده است. وكل ساختار ریاضیات از مشکل رها و بر پایه ای عاری از اشکال قراردادهشده است. ریشه و نحوه رفع این دومین بحران در مبانی ریاضیات موضوع بخش ۹-۱۴ بود. پیش اخطارهای این بحران را می‌توان در پارادوکسهای مشهور زنون به حدود ۴۵۰ ق.م. مشاهده کرد.

سومین بحران در مبانی ریاضیات به طور غیر مترقبه ای در سال ۱۸۹۷ متجسم شد، و گرچه اکنون قدمتی بیش از نصف قرن دارد هنوز به نحوی که رضایت همه افراد ذیعلاقه را فراهم آورد، حل نشده است. این بحران با کشف پارادوکسها ای تعارضاتی در حاشیه نظریه عام مجموعه ها منسوب به کانتور پدیدار شد. چون مفاهیم مجموعه تداخل زیادی در قسمت اعظم ریاضیات دارد و به همین دلیل می‌توان در واقع آن را پایه ای برای ریاضیات قرار داد کشف پارادوکسهایی در نظریه مجموعه ها طبیعتاً در اعتبار تمامیت ساختار بنیادی ریاضیات سایه تردید می افکند.

در سال ۱۸۹۷ ریاضیدان ایتالیائی بورانی - فورتی، اولین پارادوکس در نظریه مجموعه ها را به معرض توجه عموم در آورد این پارادوکس به صورتی که در ذهن بودلی فورتی بوده و توسط او بیان شده متضمن اصطلاحات فنی واژه هایی است که در این بررسی محدود، جای بسط آن وجود ندارد. معهذا، جوهر این پارادوکس را می توان با یک توصیف غیرفنی از پارادوکس کامل مشابهی که دو سال بعد توسط کانتور پیدا شد، ارائه کرد. کانتور در نظریه مجموعه های خود موقوف به اثبات این مطلب شد که به ازای هر عدد ترانسفینی مفروض همواره یک عدد ترانسفینی بزرگتر از آن وجود دارد. یعنی همانطور که بزرگترین عدد طبیعی موجود نیست، بزرگترین عدد ترانسفینی هم وجود ندارد. حال مجموعه ای را در نظر بگیرید که اعضای آن کلیه مجموعه های ممکن باشند. مطمئناً هیچ مجموعه ای نمی تواند اعضای بیش از این مجموعه کلیه مجموعه ها داشته باشد. ولی اگر چنین باشد چگونه یک عدد متعالی بزرگتر از عدد ترانسفینی این مجموعه می تواند وجود داشته باشد؟

در حالی که پارادوکسهای بورالی - فورتسی و کانتور متضمن نتایجی از نظریه مجموعه هاست برتراند راسل در سال ۱۹۵۲ پارا ودکسی کشف کرد که به چیزی جز مفهوم صرف خود مجموعه بستگی ندارد. قبل از بیان پارادوکس راسل ، متذکر می شویم که مجموعه‌ها ای اعضای خود هستند ای اعضای خود نیستند. مثلاً مجموعه همه ایده های مجرد خود ایده مجردی است، ولی مجموعه همه

انسانها يك انسان نيست . همچنين ، مجموعه همه مجموعه ها خود يك مجموعه است ولی مجموعه کليه ستارگان يك ستاره نيست. مجموعه كليه مجموعه هايی را كه اعضای خودشان هستند با M، ومجموع كليه مجموعه هايی را كه اعضای خودشان نيستند با N نشان ميدهيم حال از خود می پرسيم كه آيا مجموعه عضو خودش هست يا نيست . اگر N يكی از اعضای خودش باشد، در اين صورت N عضو Mاست و N يك عضو خودش نيست. از طرف ديگر اگر N يكی از اعضای خود نباشد آنگاه يكی از اعضای N و من M است ، و N يكی از اعضای خودش می باشد. پارادوکس از اين حقيقت ناشی ميشود كه در هر حالت به يك تناقض می رسيم.

صورت فشرده تر و دور از اطنابی از پارادوکس راسل را می توان به شکل زير ارائه کرد. فرض کنيد X مجموعه دلخواهی باشد. در اين صورت بنابر تعريف N،

(???) <<->> (?¢X)

حال X را N بگيريد و به تناقض زير برسيد

(???)<<->> (N¢N).

راسل اين پارادوکس را طی نامه ای برای فرگه فرستاد اين نامه درست بعد از آنکه فرگه آخرين جلد اثر عظيم دو جلدی خود درباره مبانی حساب را تکميل کرده بود، به او رسيد. فرگه در پايان کتاب خود با جملات متاثر کننده و کاملا توام با خويشتن داری زير به اين نامه اشاره کرد: برای يک دانشمند هيچ چيزی نامطبوعتر از آن نيست که به محض اتمام کاری مبنای آن را در حال فروپاشی ببيند نامه ای از آقای برتراند راسل در زمانی که کتاب تقريباً آماده سپردن به چاپخانه بود مرا در چنين وضعی قرارداده است. حاصل زحمات ده سال ای بيشتر همين بود.

به پارادوکس راسل به شکلهای مختلف جنبه عاميانه داده شده است. يکی از مشهورترين شکلهای آن توسط خود راسل در سال ۱۹۱۹ داده شد و به گرفتاری آرايشگری در يك دهكده معين مربوط ميشود که مبنای کار خود را بر اين گذارده که فقط و فقط صورت آن عده از اهالی دهکده را بتراشد که خود صورت خود را نمی تراشند. ماهيت پاردار کسی وضعيت اين شخص وقتی تشخيص داده ميشود که بخواهيم به سوال زير پاسخ دهيم، « آيا اين آرايشگر صورت خود را خود ميتراشد يا نه؟ اگر وی صورت خود را بتراشد، در اين صورت مطابق اصل اعلام شده از طرف خود نبايد اين کار را انجام دهد. اگر وی صورتش را خود نتراشد در اين صورت مطابق اصل خود بايد اين کار را انجام دهد.

از زمان کشف تناقضهای بالا در بطن نظريه کانتوری مجموعه ها، پارادوکسهای فراوان ديگری به وجود آمده اند. اين پارادوکسهای جديد نظريه مجموعه ها به چندين پارادوکس قديمی در منطق مربوط ميشوند. مثلاً نکته زير به ائوبوليدس مربوط به قرن چهارم ق.م. نسبت داده می شود، چيزی که الان ميگوييم نادرست است. اگر گفته اونوبوليدس درست باشد آنگاه بنابر گفته خود او اين گفته بايد نادرست باشد. از طرف ديگر ، اگر گفته ائوبوليدس نادرست باشد در اين صورت نتيجه ميشود که گفته او بايد درست باشد. بدين ترتيب گفته اونوبوليدس نمی تواند بی آنکه موجب تناقضی شود نه درست و نه نادرست باشد. پارادوکسی منسوب به اپيمنيدس که در صحت انتساب آن به اپيمنيدس جای ترديد است شايد قديمیتر از پارادوکس اونوبوليدس باشد. اپيمنيدس که خود فيلسوفی از اهالی کرت ۲ در قرن ششم ق.م بود گوياچنين گفته است که اهالی کرت هميشه دروغ می گويند. از تحليل ساده اين گفته آشکار ميشود که اين نيز ناقض خود است.

وجود پارادوکسهايی در نظريه مجموعه ها نظير پارادوکسهای بالا، به وضوح آشکار می کنند که کار از جايی عيب دارد از زمان کشف آنها نوشته های زيادی درباره اين موضوع منتشر، و کوششهای

متعددی در جهت رفع آن‌ها پیشنهاد شده است. (آشنایی با تاریخ ریاضیات، ج ۲، ص ۳۱۵-۳۱۸)

[13] اصل پنجم اقليدس كه ايجاز ساير اصول را نداشت، به هيچوجه واجد صفت بديهي نبود. در واقع اين اصل بيشتر به يك قضيه شباهت داشت تا به يك اصل. بنابراين طبيعي بود كه لزوم واقعي آن به عنوان يك اصل مورد سئوال قرار گيرد. زيرا چنين تصور مي شد كه شايد بتوان آن را به عنوان يك قضيه من اصل از ساير اصول استخراج كرد، اي حداقل به جاي آن مي توان معادل قابل قبول تري قرار داد. در طول تاريخ رياضيدانان بسياري از جمله، خواجه نصيرالدين طوسي، جان واليس، لژاندر، فوركوش وويوئي و ... تلاش كردند اصل پنجم اقليدس را با استفاده از ساير اصول تيجه بگيرند و آن را به عنوان يك قضيه اثبات كنند. اما تمام تلاش‌ها بي نتيجه بود و در اثبات دچار خطا مي شدند و به نوعي همين اصل را در اثبات خود به كار مي بردند. دلامبر اين وضع را افتضاح هندسه ناميد. ياونوش وويوئي يكي از رياضيدانان جواني بود كه در اين را تلاش مي كرد. پدر وي نيز رياضيداني بود كه سالها در اين اين مسير تلاش كرده بود . و طي نامه اي به پسرش نوشت: تو ديگر نبايد براي گام نهادن در راه تلاش كني، من پيچ و خم اين راه را از اول تا آخر مي شناسم. اين شب بي پايان همه روشنايي و شادماني زندگي مرا به كام نابودي فرو برده است، **التماس مي كنم دانش موازيها را رها كني**. ولي يانوش جوان از اخطار پدر نهراسيد، زيرا كه انديشه ي كاملاً تازه اي را در سر مي پروراند. او فرض كرد نقيض اصل توازي اقليدس، حكم بي معني اي نيست. وي در سال 1823 پدرش را محرمانه در جريان كشف خود قرار داد و در سال 1831 اكتشافات خود را به صورت ضميمه در كتاب تنتامن پدرش منتشر كرد و نسخه اي از آن را براي گائوس فرستاد. بعد معلوم شد كه گائوس خود مستقلاً آن را كشف كرده است. بعدها مشخص شد كه لباچفسكي در سال 1829 كشفيات خود را در باره هندسه نااقليدسي در بولتن كازان، دو سال قبل از بوئي منتشر كرده است. و بدين ترتيب كشف هندسه هاي نااقليدسي به نام بوويوئي و لباچفسكي ثبت گرديد.(سايت راسخون، مقاله هندسه نااقليدسي) همچنين

مراجعه كنيد به صفحه janos Bolyai

[14] دو رويداد رياضي مهم و انقلابي در نيمه اول قرن نوزدهم به وقوع پيوست. اولين آن‌ها كشف هندسه خود سازگاري ، غير از هندسه مرسوم ،اقليدس در حدود سال ۱۸۲۹ بود؛ دومي كشف جبري متفاوت با جبر معمولي دستگاه اعداد حقيقي در سال ۱۸۴۳ بود. اكنون توجه خود را به بررسي اين دو رويداد معطوف كرده ابتدا آن را كه در زمينه هندسه است مورد بحث قرار ميدهيم.

شواهدي در دست است كه بسط منطقي نظريه موازي‌ها ونانيان قديم را به طور قابل ملاحظه اي دچار در دسر كرده بود اقليدس با تعريف خطوط موازي به عنوان خطوطي واقع در يك صفحه كه هر اندازه آن‌ها را در هر جهت امتداد دهيم يكديگر را تلاقي نمي كنند و با پذيرفتن اصل توازي خود به عنوان يك اصل موضوع كه امروزه مشهور است ، به اين مشكلات پاسخ داد. اين اصل (براي ديدن بيان آن نگاه كنيد به بخش ۵ - ۷) كه ايجاز ساير اصول را ندارد به هيچوجه واجد صفت بديهي نيست. در واقع اين اصل، عكس قضيه ۱۷ است و بيشتر به يك قضيه شباهت دارد تا يك اصل بعلاوه اقليدس از اين اصل نواز تا وقتي كه به قضيه ۲۹ مي رسد، استفاده نمي‌كند. طبيعي بود كه لزوم واقعي اين اصل مورد سؤال قرار گيرد و چنين تصور شود كه شايد بتوان آن را به عنوان قضيه اي از نه «اصل متعارفي» و «اصل موضوع» ديگر استخراج كرد اي حداقل بتوان به جاي آن معادل قابل قبولتري را قرار داد. ...

تلاش‌ها در جهت استخراج اصل توازي به عنوان قضيه اي از نه اصل متعارفي و اصل موضوع ديگر هندسه دانان را براي متجاوز از دو هزار سال مشغول كرد و منجر به برخي از دوررس‌ترين پيشرفت‌هاي رياضيات نوين شد. براهين متعددي براي اين اصل ارائه شد اما طولي نكشيد كه نشان داده شد كه هر يك از آن‌ها مبتني‌بر يك فرض تلويحي معادل با خود اصل بوده‌اند...

بوبوئی کشفیات خود را در سال ۱۸۳۲ در ضمیمه ای برکارهای ریاضی پدرش به چاپ رساند. بعداً معلوم شد که لباچفسکی کشفیات مشابهی را زودتر در سالهای ۱۸۲۹-۱۸۳۰ منتشر کرده است. ولی به دلیل موانع زبانی و کندی در گسترش اکتشافات جدید موجود در طی آن سالها کار لباچفسکی چند سالی در اروپای غربی ناشناخته ماند. به نظر می رسد نیازی به بحث درباره نظریه های بغرنج و احتمالاً بی اساس داير بر اینکه چگونه هر يك از این سه تن اطلاعاتی از کشفیات یکی دیگر به دست آورده و به خود منتسب کرده است، نباشد. در آن زمان هم سوءظن و هم متهم کردن دیگران تا حد زیادی وجود داشته است.

ای ون (ای ووهان) بوييوئی يك افسر مجارستانی در ارتش اطریش و فرزند فورکوش ای وولفگانگ بوييوئی، يك معلم ریاضی والیتی و دوست دیرینه گاوس بود. بدون شك محرك بوویوئی جوان در مطالعه اصل توازی، پدرش بود که پیشتر از آن علاقه مندی خود را به این مسئله نشان داده بود پیش از سال ۱۸۲۳ یانوش بوویوئی شروع به درک ماهیت واقعی مسئله ای که با آن مواجه بود کرد و در نامه ای که طی این سال به پدر نوشت، شیفتگی خود را به کار خود نشان میدهد. در این نامه وی عزم خود را برای چاپ رساله ای در باب نظریه موازی به محض آنکه زمان و فرصت تنظیم مطالب را پیدا کند اعلام کرده و ادا در می دهد که «من از هیچ جانی تازه و شگفت انگیز آفریده ام» پدر اصرار می کند که مقاله مورد نظر به عنوان ضمیمه ای برای نیمه فلسفی حجیم دو جلدی خود او درباره ریاضیات مقدماتی چاپ شود. بسط و تنظیم اندیشه ها کندتر از آنچه یانوش انتظار داشت پیش رفت، ولی سرانجام در سال ۱۸۲۹، وی دستنویس پایانی یافته را به پدر تسلیم کرد و سه سال بعد، در ۱۸۳۲ ، رساله به صورت يك ضمیمه بیست و شش صفحه ای در انتهای جلد اول اثر پدرش ظاهر می شود...

در سال ۱۸۵۴، ریمان نشان داد که اگر امتناهی بودن خط مستقیم کنار گذاشته شود و صرفاً بی کرانگی آن مورد پذیرش واقع شود آنگاه با چند جرح و تعدیل جزئی اصول موضوعه دیگر هندسه سازگار ان اقلیدسی دیگر را می توان از فرض زاویه حاده به دست آورد. کلاین در سال ۱۸۷۱ به این سه هندسه یعنی هندسه بویوئی و لبا چفسکی، هندسه اقلیدس، و هندسه ریمان نامهای هندسه هذلولوی هندسه سهموی و هندسه بیضوی داد.

البته نتیجه مستقیم کشف این اولین هندسه نا اقلیدسی به سرانجام رسیدن مسئله دیرینهٔ اصل موضوع توازی بود - نشان داده شد که اصل موضوع توازی مستقل از اصول موضوعه دیگر هندسه اقلیدسی است. اما پیامدی دور رستر از این آزاد شدن هندسه از قالب سنتی آن بود. این عقیده ریشه دار قرنهای متمادی که تنها يك هندسه ممکن می تواند موجود باشد خدشه دار شد و راه برای ایجاد چندین دستگاه مختلف هندسه گشوده شد. با امکان خلق چنین هندسه های کاملاً مصنوعی آشکار شد که هندسه لزوماً به فضای مادی واقعی گره نخورده است. اصول موضوعه هندسه برای ریاضیدان صرفاً فرض هایی شدند که درستی یا نادرستی فیزیکی آن ها برای او مطرح نیست. ریاضیدان می تواند اصول موضوعه خود را برای ارضای خاطر خود اختیار کند به شرطی که سازگاری آن ها با یکدیگر محفوظ بماند.(آشنایی با تاریخ ریاضیات، ج ۲، ص ۱۸۴-۱۹۰)

[15] جلسه اول آشنایی با تاریخ ریاضیات: معضلات و بحران ها

[16] گئورگ کانتور یک لوتری مومن بود که اعتقادات صریح مسیحیان فلسفه علم او را شکل داد.گفته میشود کانتور بر این باور بوده که نظریه اعداد ترامتناهی از سوی خدا بوی الهام شده بوده‌است.(سایت ویکی پدیا) کانتور در سال 1905 پس از پشت سر گذاشتن دوران بیمارستان و بازگشتش به خانه، یک اثر مذهبی نوشت.(سایت آی هوش)

[17] پاتریک گریم،فیلسوف آمریکایی دارای نوشته هایی در زمینه فلسفه دین،فلسفه علم،فلسفه منطق(سایت ویکی پدیا)

[18] در ابتدای مقاله با خدایی گام به گام میخوانیم: افراطي ترين بي خدايان ، بي خدايان مثبت گرا هستند كه مدعي هستند دليل دارند بر نبود خدا و قانع نمي شوند كه بگويند ما نمي دانيم خدا هست يا خير؟ بلكه مي گويند حتما مي دانيم كه خدا نيست ، و ادعاي علم و قطع كه امر ساده اي نيست دارند ، و توجه كنيد به تفاوت اين سه: علم به وجود ، علم به عدم ، عدم علم به وجود يا عدم.

[19] در نظریه مجموعه‌های مقدماتی، قضیه کانتور نتیجه بنیادینی است که بیان می دارد: برای هر مجموعه A ، مجموعه تمام زیر مجموعه های A (به آن مجموعه توانی A گفته می شود و با P (A) } نمایش داده می شود) به طور اکید کاردینالی بزرگتر از خود A دارد. برای مجموعه های متناهی می توان با شمردن تعداد زیر مجموعه ها، درستی قضیه کانتور را مشاهده کرد. با در نظر گرفتن تهی به عنوان یک زیر مجموعه، کل زیرمجموعه های یک مجموعه n عضوی برابر خواهد بود، بنابر این اگر

$card(A) = n$ ،

آنگاه

$card(P(A)) = 2^n$

و قضیه برقرار است چون برای تمام اعداد صحیح نامنفی داریم $2^n > n$

کشف مهم کانتور این بود که گزاره اخیر برای هر مجموعه ای درست است، یعنی علاوه بر مجموعه های متناهی برای مجموعه های نامتناهی، چه شمارا ای ناشمارا نیز درست است. به طور خاص، یکی از پیامدهای مهم قضیه کانتور این است که اعداد طبیعی که یک مجموعه شمارا با کاردینال

$card(N) = \aleph_0$?

است، برابر یک مجموعه ناشمارا می باشد که کاردینال آن با اعداد حقیقی برابر بوده و این کاردینال از کاردینال اعداد طبیعی بزرگتر است و به آن کاردینال پیوستار گویند:

$card(R) = card(P(N))$.

رابطه بین این کاردینال ها را به این صورت نمایش می دهند:

$c = 2^{\aleph_0} > \aleph_0$?

وی‌کی پدیا) همچنین ملاحظه کنید: Cantor's theorem

[20] اینکه راسل چه موقع این پارادوکس را کشف کرد دقیقاً مشخص نیست، ولی به‌نظر می‌رسد که در ماه مه ی ژوئن سال ۱۹۰۱ و احتمالاً به عنوان نتیجه‌ای از کارش بروی قضیه کانتور (عدد اصلی هر مجموعه از عدد اصلی مجموعه توانی آن کمتر است) به این پارادوکس پی برده‌است.

او ابتدا پارادکس را در سال ۱۹۰۱ به صورت مقاله‌ای در ماهنامه‌ٔ اینترنشنال با عنوان «جدیدترین کار در فلسفه ریاضیات» مطرح کرد.

او همچنین برهان کانتور را در مورد اینکه بزرگترین عدد اصلی وجود ندارد مطرح ساخت و اضافه کرد که «استاد» در مورد یک مغالطه زیرکانه مقصر است که او بعداً در این باره توضیح می‌دهد.

راسل همچنین پارادوکس را در کتاب خود با عنوان اصول ریاضیات (Principles of Mathematics)-که نباید با کتاب قبلی او Principia Mathematica اشتباه شود- ذکر کرد که آن را «تناقض» نامید. دوباره او بیان کرد که این پارادکس را با تجزیه و تحلیل برهان کانتور برای اثبات عدم وجود بزرگترین عدد اصلی به‌دست آورده‌است.

راسل در سال ۱۹۰۲ این پارادکس را با فرگه که در حال نوشتن جلد دوم کتاب خود با عنوان Grundgesetze der Arithmetik بود در میان گذاشت.

فرگه با عجله در ضمیمه‌ای، یک راه حل برای رفع این پارادکس نوشت که بعدها ناکافی بودن آن به اثبات رسید. به هر حال، بعد از چاپ جلد دوم کتاب، فرگه بعد از انتشار دومین بخش کتاب خود، کمی در مورد منطق ریاضی و فلسفه ریاضیات نوشت.

ارنست تسرملو در هنگام کار روی نظریه اصل موضوعی مجموعه‌ها که در سال ۱۹۰۸ آن را منتشر ساخت، به این پارادکس پی‌برد ولی گمان کرد نکته‌ٔ کوچکی است و اذا هیچگاه آن را منتشر نساخت. تسرملو در دستگاه اصل موضوعی خود، از این پارادکس با بهره‌گیری از اصل موضوعی با عنوان اصل موضوع تصریح جلوگیری کرد.

راسل و آلفرد نورث وایتهد سه جلد از کتاب اصول ریاضیات را به امید پیروزی در حالی که فرگه شکست خورده‌بود نوشتند و در آن سعی کردند با استفاده از نظریه‌ٔ انواع، از چنین پارادکس‌هایی در نظریه طبیعی مجموعه‌ها اجتناب کنند.

هنگامی که آنها موفق به پایه‌ریزی حساب شدند، به نظر نمی‌رسید که فقط از منطق استفاده کرده باشند. به هر حال کورت گودل، در بین سالهای ۱۹۳۰ تا ۱۹۳۱ ثابت کرد که منطق بسیاری از بخشهای Principia Mathematica که اکنون به عنوان منطق مقدماتی خوانده می‌شود کامل است ولی حساب پئانو در صورتی که سازگار باشد لزوماً ناکامل است؛ بنابراین از این به بعد برنامه‌های منطقی فرگه و Principia Mathematica مردند.(سایت وی‌کی پدیا)

بازبینی #1
ایجاد شده 18 ژانویه 2025 06:56:54 توسط khoddami
به روزرسانی شده 18 ژانویه 2025 07:09:17 توسط khoddami