۳۷. خلاصه الحساب (۱۳۸۸/۱۰/۱۲)

سال تحصیلی (۱۳۸۹-۱۳۸۸) - شنبه،۱۲ دی ۱۳۸۸ عنوان: تحلیل روش استخراج جذر

- خـلاصـه اجـمالـی
- خـلاصـه تفصیـلی

خلاصه اجمالی

این جلسه به بررسی مفاهیم ریاضی و هندسی پیرامون جذور اعداد و نظریه مجموعه‌های نامتناهی می‌پردازد. استاد با مقایسه اعداد گویا و گنگ، توضیح می‌دهند که اگرچه نقاط روی محور اعداد معین هستند، اما بیان دقیق ریشه‌های دوم غیرکامل از طریق اعداد صحیح ناممکن است. در ادامه، روش‌های تقریب زدن جذر با تکیه بر آراء دانشمندانی چون شیخ بهایی و اقلیدس تشریح شده است. این آموزش از مدل‌های هندسی و مساحتی برای تبیین فرمول «دو برابر جذر به‌اضافه یک» استفاده می‌کند تا منطق حاکم بر محاسبات تقریبی را روشن سازد. در نهایت، چگونگی رده‌بندی ارقام در جدول‌های محاسباتی قدیمی برای استخراج ریشه اعداد بسیار بزرگ مورد بحث قرار می‌گیرد.

خلاصه تفصیلی

مفهوم بینهایت و برابری کل و جزء

در ابتدای بحث، به این نکته اشاره می‌شود که در مجموعه‌های نامتناهی، قاعده «الکل اعظم من الجزء» صدق نمی‌کند. برای مثال، اگر اعداد طبیعی را در ردیف بالا و مربعات آن‌ها را در زیرشان بنویسیم، به ازای هر عدد، یک مربع کامل وجود دارد و این روند تا بینهایت ادامه می‌یابد. اگرچه مربعات تنها بخشی از اعداد هستند، اما چون می‌توان بین هر عدد و مربعش تناظر یک‌به‌یک برقرار کرد، تعداد اعضای هر دو مجموعه برابر (بینهایت) است.

تفکیک مجذورهای کامل و اعداد گنگ

اعداد را از منظر جزرگیری به دو دسته تقسیم می‌شوند:

- **مجذورهای کامل:** اعدادی که حاصلضرب یک عدد در خودش هستند (مانند ۱، ۴، ۹، ۱۶، ۲۵). جذر این اعداد دقیق است و در محاسبات باقی‌ماندهای ندارند.
- **اعداد اصم (گنگ):** اعدادی که بین مجذورهای کامل قرار می‌گیرند (مانند ۲، ۳، ۵). در عالم حساب، این اعداد جذر دقیق ندارند و تنها می‌توان به صورت تقریبی آن‌ها را بیان کرد. با این حال، در عالم هندسه و روی محور اعداد، این نقاط کاملاً معین و دقیق هستند.

تبیین هندسی رادیکال‌ها

استاد با استفاده از قانون «شکل عروس» (فیثاغورس) توضیح می‌دهند که چگونه می‌توان جایگاه دقیق اعداد گنگ را روی محور هندسی مشخص کرد:

- اگر مثلثی با اضلاع ۱ و ۱ بسازیم، وتر آن رادیکال ۲ خواهد بود. با زدن یک قوس، این نقطه دقیقاً روی محور مشخص می‌شود.
- اگر بر روی رادیکال ۲، واحدی به ارتفاع ۱ بنا کنیم، وتر جدید رادیکال ۳ خواهد بود.
- این روند ادامه می‌یابد تا به رادیکال ۴ (یعنی عدد ۲) برسیم. این روش نشان می‌دهد که اگرچه بیان این اعداد با اعداد گویا محال است، اما واقعیت هندسی آن‌ها قطعی است.

روش تقریبی برای استخراج جذر

بخش عمده‌ای از جلسه به بررسی روش «شیخ» برای محاسبه تقریبی جذر اعداد غیرمربع کوچک اختصاص دارد. مراحل این کار عبارتند از:

۱. **یافتن نزدیک‌ترین مجذور کامل**: ابتدا نزدیک‌ترین مجذور کامل ِکوچک‌تر از عدد مورد نظر را یافته و از آن کسر می‌کنیم.

۲. **فرمول نسبت باقیمانده:** باقیمانده را بر «دو برابر ِجذر ِمسقط شده به‌اضافه یک» (مضعف جذر المسقط مع واحد) تقسیم می‌کنیم.

- **تبیین هندسی فرمول:** وقتی یک مربع بزرگ‌تر (مثلاً ۲۵) را حول یک مربع کوچک‌تر (مثلاً ۱۶) در نظر می‌گیریم، فضای مابین آن‌ها شامل دو مستطیل و یک مربع کوچک در گوشه است.
- **علت افزودن «یک واحد»**: در فرمول، عدد ۱ اضافه می‌شود تا مساحت آن مربع کوچک گوشه لحاظ شود. این کار باعث می‌شود فرمول برای تمام اعداد بین دو مجذور کامل یکسان عمل کند. اگر این واحد اضافه نشود، در اعدادی مانند ۲۴، جذر به غلط ۵ محاسبه می‌شود که با واقعیت سازگار نیست.

تحلیل خطا و دقت محاسبات

دقت این روش تقریبی به فاصله عدد تا مجذور کامل بعدی بستگی دارد:

- هرچه عدد به مجذور کامل بعدی نزدیک‌تر باشد (مثلاً ۲۴ نسبت به ۲۵)، تقریب دقیق‌تر است.
- در اعداد بزرگ‌تر، درصد خطای نسبی کمتر می‌شود؛ زیرا آن «یک واحد» که در فرمول اضافه می‌شود، در مقایسه با کل مساحت و اضلاع بزرگ، مقدار ناچیزی به حساب می‌آید.

استخراج جذر اعداد بزرگ (جدول)

در پایان، به روش استفاده از «جدول» برای اعداد بزرگ اشاره می‌شود:

- **علامت‌گذاری:** با علامت‌گذاری یکدرمیان ارقام از سمت راست، تعداد رقم‌های جزر مشخص می‌شود (مثلاً سه علامت نشان‌دهنده یک جزر سه‌رقمی است).
- **محاسبه مرتبه‌ای:** در هر مرحله، از سمت چپ شروع کرده و مربع بزرگ‌ترین رقم ممکن را کسر می‌کنیم. در اینجا اعدادی مثل ۳ در واقع نمایندهٔ ۳۰۰ هستند (اگر جزر سه‌رقمی باشد) و محاسبات بر اساس باریکه‌های مساحتی در ابعاد بزرگ انجام می‌شود.

> **دانلود پیوست : شرح فاضل جواد برخلاصه‌الحساب**