۱۳. خلاصه الحساب (۱۳۸۸/۰۷/۲۹)

سال تحصیلی (۱۳۸۹-۱۳۸۸) - چهارشنبه،۲۹ مهر ۱۳۸۸ عنوان: اعمال اصلی در حساب ۲

- خـلاصـه اجـمالـی
- خـلاصـه تفصیـلی

خ‌لاص‌ه اج‌مال‌ی

در این جلسه استاد به تشریح چهار عمل اصلی (جمع، تفریق، ضرب، و تقسیم) و اعمال مرتبط (تنصیف، تضعیف، و تجذیر) می‌پردازند و تعاریف آن‌ها را بررسی می‌کنند. بخش قابل توجهی از گفتگو به تطبیق اصطلاحات حساب قدیم (مانند "حساب صحاح" به معنای اعداد طبیعی) با اصطلاحات ریاضی مدرن اختصاص دارد. همچنین، به طور مفصل به نظریه مجموعه‌ها و دسته‌بندی اعداد توسط کانتور (شامل اعداد طبیعی، گویا، و حقیقی) پرداخته می‌شود، که تمایز میان مجموعه‌های شمارا و ناشمارا و مفهوم اعداد چگال را روشن می‌سازد. در انتها، بحث به ریشه تاریخی نمادگذاری‌ها در هندسه تحلیلی (مانند مختصات دکارتی) و تمایز میان مفاهیم حسابی و جبری (مانند جذر حسابی و جبری) کشیده می‌شود.

خ‌لاص‌ه تف‌ص‌ی‌ل‌ی

۱. ????? ? ?????? ?? / ??:??

۲. ????? ??? ???? ???? / ??:??

۳. ????? ??? ????? ?? ???? /??:??

۴. ????? ??? / ??:??

۵. ف‌ل‌س‌ف‌ه ی ج‌ای‌گ‌اه اع‌داد م‌ث‌ب‌ت در م‌ح‌ور

م‌ف‌ه‌وم «ح‌س‌اب ص‌ح‌اح» و اع‌داد ط‌ب‌ی‌ع‌ی

ه‌دف اول‌ی‌ه، ت‌وض‌ی‌ح ب‌اب اول در ح‌س‌اب ص‌ح‌اح ا‌س‌ت.

اع‌داد ص‌ح‌ی‌ح در ح‌س‌اب ق‌دی‌م و ج‌دی‌د: م‌ن‌ظ‌ور از «ح‌س‌اب ص‌ح‌اح» در م‌ت‌ن خ‌لاص‌ة الح‌س‌اب، ه‌م‌ان م‌ح‌اس‌ب‌ه‌ی اع‌داد ط‌ب‌ی‌ع‌ی ا‌س‌ت، ز‌ی‌را ا‌ی‌ن م‌ح‌اس‌ب‌ه ش‌ام‌ل ص‌ف‌ر ن‌ی‌س‌ت و اع‌داد ط‌ب‌ی‌ع‌ی ب‌را‌ی ش‌م‌ار‌ش ب‌ه ک‌ار م‌ی‌رو‌ن‌د. در ا‌ص‌ط‌لاح ح‌س‌اب ق‌دی‌م، «ص‌ح‌ی‌ح» م‌ق‌اب‌ل «ع‌دد ک‌س‌ر‌ی» ق‌رار دارد. «الب‌اب الث‌ان‌ی ف‌ی ح‌س‌اب الک‌س‌ور» در م‌ق‌اب‌ل ح‌س‌اب ص‌ح‌اح ق‌رار م‌ی‌گ‌ی‌رد. ک‌س‌ور در ا‌ی‌ن ا‌ص‌ط‌لاح ش‌ام‌ل ن‌ص‌ف، ث‌ل‌ث و ر‌ب‌ع و غ‌ی‌ر‌ه بو‌ده‌ا‌ن‌د.

ت‌ع‌ری‌ف اع‌داد و ن‌ظ‌ر‌ی‌ه م‌ج‌م‌وع‌ه‌ها: م‌ف‌ه‌وم اع‌داد ط‌ب‌ی‌ع‌ی و ن‌ظ‌ر‌ی‌ه م‌ج‌م‌وع‌ه‌ها ق‌دم‌ت چ‌ن‌دا‌ن‌ی ن‌دارد و در ا‌ب‌ت‌دا‌ی ق‌رن ب‌ی‌س‌ت‌م ت‌وس‌ط ر‌ی‌اض‌ی‌دا‌ن‌ی ب‌ه ا‌ن‌ام ک‌ا‌ن‌ت‌ور م‌ط‌رح و ب‌س‌ط دا‌ده ش‌د. ک‌ا‌ن‌ت‌ور اع‌داد ط‌ب‌ی‌ع‌ی را اع‌دا‌د‌ی ا‌ن‌م‌ی‌د ک‌ه ب‌را‌ی ش‌م‌ار‌ش و از ی‌ک ش‌ر‌وع م‌ی‌ش‌و‌ن‌د.

ع‌م‌ل‌ی‌ات ا‌ص‌ل‌ی و م‌ل‌ح‌ق‌ات آ‌ن

در ا‌ی‌ن ب‌خ‌ش ب‌ه م‌ع‌ر‌ف‌ی چ‌ه‌ار ع‌م‌ل ا‌ص‌ل‌ی و م‌ل‌ح‌ق‌ات آ‌ن‌ه‌ا ما‌ن‌ن‌د ت‌ن‌ص‌ی‌ف و ت‌ض‌ع‌ی‌ف پ‌ر‌دا‌خ‌ت‌ه م‌ی‌ش‌و‌د. ش‌ی‌خ ب‌ها‌ی‌ی ا‌ی‌ن ت‌ع‌ار‌ی‌ف را ب‌ه ص‌ور‌ت ب‌س‌ی‌ار مو‌ج‌ز ار‌ا‌ئ‌ه دا‌ده ا‌س‌ت.

الف. جمع و تفریق

جمع: «زیادهٔ عددِ علی آخر جمعٌ». جمع عبارت است از زیاد کردن عددی بر عدد دیگر. منظور از زیاد کردن، نه صرفاً افزایش لغوی است، بلکه کنار هم گذاشتن است.

تفریق: «و نقصه منه تفریق». کم کردن عددی از عدد دیگر تفریق است.

در این نوع حساب (بر مبنای اعداد طبیعی)، تفریق مقید بود؛ عدد منهای شونده باید کمتر از عدد اول باشد (مانند ۲ منهای ۳ ممنوع است).

حتی صفر در این سیستم حساب، عدد تلقی نمی‌شد بلکه رقم بود.

اعداد منفی در علم حساب قدیم تعریف نشده بودند و پیدایش آنها از علم جبر بوده است (در فصل هشتم کتاب مطرح می‌شود). با این حال، مفهوم عدد منفی پیش از جبر نیز در زبان (مثلاً در فقه و قرآن با عبارت «الا کذا»، مانند «الا خمسین» در مورد حضرت نوح) وجود داشته است.

ب. تضعیف و ضرب

تضعیف: «و تکریره مرّةً تضعیف» . تکرار یک عدد تنها یک بار (یعنی به اضافه‌ی خودش یا ضرب در دو) را تضعیف می‌نامند.

ضرب: «و مرارًا بعِدِّةِ آحادِ آخر، ضربٌ» . تکرار یک عدد چندین بار (بیش از یک بار تکرار) به شماره‌ی آحاد یک عدد دیگر، ضرب نامیده می‌شود .

بر اساس تعریف، ضرب خود نوعی شمردن است.

عدّ و معدود: عددی که تکرار می‌شود «معدود» و عددی که به تعداد آحاد آن تکرار صورت می‌گیرد، «عدّ» یا ضریب نامیده می‌شود. عبارت شیخ نشان می‌دهد که عدد اولیه معدود و عدد ثانوی ضریب است.

ج. تنصیف و تقسیم

تنصیف: «تجزیته بمتساویین تنصیف». تجزیه کردن (جدا کردن) یک عدد به دو قسمت مساوی، تنصیف است.

تقسیم: «بمتساویاته بعدهٔ آحاد آخر قسمة». تجزیه یک عدد به قسمتهای مساوی، به عدد آحاد عدد دیگر، تقسیم است.

د. تجذیر

تجذیر: «و تحصیل ما تألف من تربیعه تجذیر». تجذیر عبارت است از به دست آوردن عددی (جذر/ریشه) که از مربع کردن آن عدد، عدد معلوم (مجذور/مربع) به دست آمده است.

در این تعریف: «ما» (آنچه به دست می‌آید) همان جذر (ریشه یا رادیکال) است.

عددی که عمل بر روی آن انجام می‌شود (که از تربیع آن جذر تألیف شده)، مجذور (مربع) نام دارد.

اصطلاح هندسی برای جذر، ضلع (ضلع مربع) است، زیرا مساحت مربع (مجذور) از ضرب ضلع در خودش به دست می‌آید.

نظریه اعداد و خواص مجموعه

شمارش و انواع اعداد: چند نوع عدد مطرح است:

شمردنی (مانند یک، دو، سه) که در آن ترتیب لحاظ نمی‌شود.

ترتیبی (مانند اول، دوم، سوم) که ترتیب در آن مهم است.

اصلی یا کاردینال یا مجموعی (مانند تعداد بیست نفر دانش‌آموز).

اعداد گویا (شمارا) و حقیقی (ناشمارا): کانتور مجموعه اعداد گویا (شامل کسرهای) را یک مجموعه بی‌نهایت چگال یا فشرده دانست، به این معنی که بین هر دو عدد گویا، بی‌نهایت عدد گویای دیگر وجود دارد. با وجود چگال بودن این مجموعه، کانتور اثبات کرد که اعداد گویا شمارا هستند (قابل شمردن طبق اعداد طبیعی). در مقابل، اعداد حقیقی ناشمارا هستند و قابل شمردن نیستند.

خاصیت بستگی: بستگی یعنی نتیجه یک عمل ریاضی همواره درون همان مجموعه اعداد قرار گیرد.

مجموعه اعداد طبیعی نسبت به عمل جمع بسته است.

مجموعه اعداد طبیعی نسبت به عمل تفریق بسته نیست، زیرا می‌توان تفریقی انجام داد (مثل ۲ منهای ۳) که جواب آن (عدد منفی) در مجموعه اعداد طبیعی وجود نداشته باشد.

تقابل «حساب» با «جبر» و «هندسه»

۱. حساب در مقابل جبر: این دو مفهوم به ویژه در تعریف ریشه (جذر) مطرح می‌شوند.

- جذر حسابی: ریشه‌های مثبت یک عدد را شامل می‌شود (مثلاً جذر حسابی ۲۵، عدد ۵ است).
- جذر جبری: شامل تمام ریشه‌ها (مثبت و منفی) است. در عالم جبر، عدد منفی وجود دارد (مثلاً ۲۵ دو جذر جبری دارد: ۵ و ۵-).

۲. حساب در مقابل هندسه: این تقابل در تعریف تصاعدها و میانگین‌ها دیده می‌شود.

- حساب روحش جمع است (مبنی بر اضافه کردن).

- هندسه روحش ضرب است (مبنی بر توان و تکثیر).
  - تصاعد حسابی: افزایش یک عدد با افزودن ثابت (مانند پله‌کانی بالا رفتن).
  - تصاعد هندسی: افزایش یک عدد از طریق توان مرتب.
  - میانگین حسابی: جمع اعداد و تقسیم بر تعداد آن‌ها (معدل معمولی).
  - میانگین هندسی: ضرب اعداد در یکدیگر و گرفتن ریشه‌ای به تعداد اعداد ضرب شده (مثلاً اگر سه عدد در هم ضرب شوند، ریشه سوم گرفته می‌شود).
  - میانگین حسابی در واقع همان جذر حسابی است.

۳. هندسه و مفاهیم مثبت: هندسه ذاتاً با مفاهیم مثبت سر و کار دارد (طول، عرض، سطح و حجم همواره مثبت هستند)، بنابراین در هندسه، عدد منفی معنا ندارد. این موضوع در طراحی سیستم مختصات دکارتی (کارتزین) نقش داشته است؛ محورهای مثبت به سمت راست (جهت عادت به شمارش از چپ به راست) و بالا (زیرا مساحت و ارتفاع مثبت است) قرار داده شده‌اند.

تشبیه برای بستگی: می‌توان بستگی مجموعه اعداد را به یک جعبه ابزار تشبیه کرد. اگر جعبه ابزار (مجموعه اعداد طبیعی) نسبت به عملیات (مثل تفریق) بسته باشد، یعنی هرگز برای انجام آن عملیات نیازی به استفاده از ابزاری (عددی) خارج از آن جعبه نخواهید داشت. اما چون در تفریق اعداد طبیعی ممکن است به اعداد منفی نیاز پیدا شود، این مجموعه نسبت به تفریق بسته نیست و باید «از بیرون» (مجموعه بزرگتر، یعنی اعداد صحیح) ابزار بیاوریم.

> **دانلود پیوست : شرح فاضل جواد برخلاصه‌الحساب**